数学２Ｃ (水曜２限、10:15　11:45）第ニ回レポート解答例 (TA 山田和彦君)

1. $f(z) = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ について

i).　$\delta z = ih, h \in \mathrm{R}$ として $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\delta z)-f(1)}{\delta z}$ を計算せよ.

$$f(1+ih) = h \quad , \quad f(1) = 0 \quad \text{より} \quad f(1+ih) - f(1) = h \tag{1}$$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+ih)-f(1)}{ih} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{ih} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{i} = -i \tag{2}$$

ii).　$\delta z = h, h \in \mathrm{R}$ として $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+\delta z)-f(1)}{\delta z}$ を計算せよ.

$$f(1+h) = 0 \quad , \quad f(1) = 0 \quad \text{より} \quad f(1+h) - f(1) = 0 \tag{3}$$

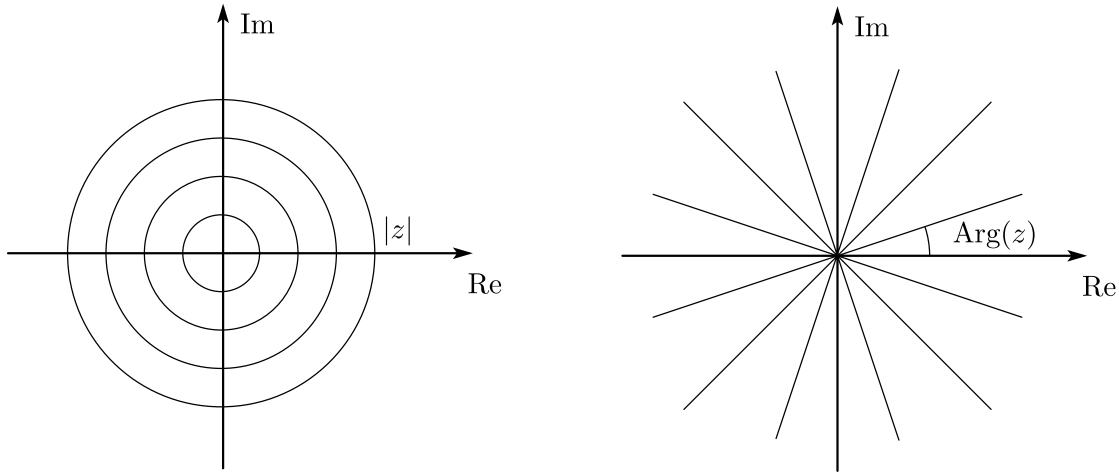
よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \tag{4}$$

2. $f(z) = \mathrm{Log}(z)$(主値) に対して

i).　$|z| = const$, $\mathrm{Arg}(z) = const$ の曲線群を z 平面上にそれぞれ描け.

図 1 に示す。

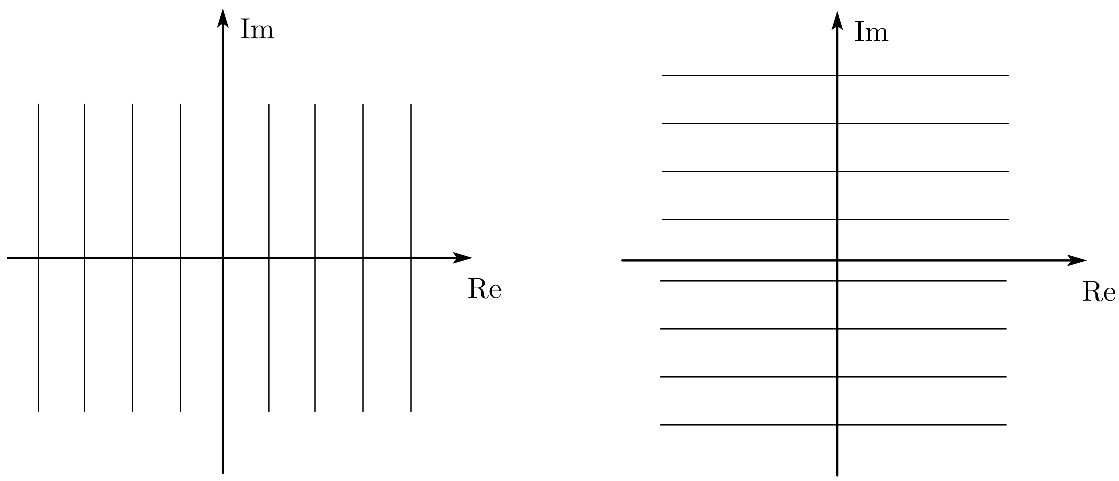


$|z| = const$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(z) = const$

図 1: 2. - i) の解答

ii). i) の曲線群は $w = f(z)$ で w 平面のどのような曲線に写るか、描け.

$w =$ Log$(z) = \log|z| + i\mathrm{Arg}(z)$ なので、図２のようになる。



$|z| = const$ の $w = f(z)$ による写像 $\qquad$ $\mathrm{Arg}(z) = const$ の $w = f(z)$ による写像

図 2: 2. - ii) の解答

iii). $f(z)$ は $z \neq 0$ で正則であることを示せ.

$$Log(z) = Log(x + iy) = \log\sqrt{x^2 + y^2} + i\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{5}$$

なので

$$X = \log\sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad Y = \tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{6}$$

とおくと、$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{1/2}{\sqrt{x^2 + y^2}}2x = \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1/2}{\sqrt{x^2+y^2}}2y = \frac{y}{x^2+y^2} && (8)\\
\frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\times(-\frac{y}{x}) = \frac{-y}{x^2+y^2} && (9)\\
\frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{1}{1+(y/x)^2}\times\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} && (10)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} \tag{11}
$$

より、CR の関係式が成り立つので $z \neq 0$ のとき $\mathrm{Log} z$ は正則。

3. 正則な関数 $f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$ について

$$X = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ である } f(z) \text{ を CR の関係式より求めよ.}$$

与式より、

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2xx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial Y}{\partial y} \tag{12}$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \tag{13}$$

式 (12) より、y について積分すると

$$Y = \frac{-y}{x^2 + y^2} + F_1(x) \tag{14}$$

式 (13) より、x につて積分すると

$$Y = \frac{-y}{x^2 + y^2} + F_2(y) \tag{15}$$

よって、式 (14) と式 (15) を比較して、$F_1(x) = F_2(y) = C' = const$

$$Y = \frac{-y}{x^2 + y^2} + C \quad \text{より} \quad f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2} + C'\right) \tag{16}$$

$z = x + iy$ より、$iC' = C$ とおくと式 (16) は以下のようになる。

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + C = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + C = \frac{1}{z} + C \tag{17}$$