数学２C (水曜２限、10:15　11:45）第十一回レポート解答例

1. i) $< f, g >= \int_a^b f^*(x)g(x)dx$ として、関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ が規格直交する完全列であるとは何か述べよ.

関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ が規格直交するとは、以下の２つの条件を満たす場合である。

$$
\begin{aligned}
< \varphi_m(x), \varphi_n(x) > &= 0 \quad (m \neq n) & (1)\\
< \varphi_n(x), \varphi_n(x) > &= 1 & (2)
\end{aligned}
$$

関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ が完全列になるとは、以下の条件を満たす場合である。

$$
\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x') = \delta(x - x') \qquad (3)
$$

ii). $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}, \;\; 0 \leq x \leq 2\pi, \; (a = 0, \; b = 2\pi)$ が i) を満たすことを示せ

$< \varphi_m(x), \varphi_n(x) >= 0 \;\; (m \neq n)$ について

$$
\begin{aligned}
< \varphi_m(x), \varphi_n(x) > &= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{imx})^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\, dx & (4)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-imx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\, dx & (5)\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx & (6)\\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right]_0^{2\pi} & (7)\\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{i(n-m)} - \frac{1}{i(n-m)} \right) & (8)\\
&= 0 & (9)
\end{aligned}
$$

$< \varphi_n(x), \varphi_n(x) >= 1$ について

$$
\begin{aligned}
< \varphi_n(x), \varphi_n(x) > &= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx})^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\, dx & (10)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-inx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\, dx & (11)\\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dx & (12)\\
&= \frac{1}{2\pi}\, 2\pi & (13)\\
&= 1 & (14)
\end{aligned}
$$

また、デルタ関数のフーリエ級数展開を用いて

$$
\begin{aligned}
\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x') &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx'})^* & (15)\\
&= \sum_n \frac{1}{2\pi} e^{in(x-x')} & (16)\\
&= \delta(x - x') & (17)
\end{aligned}
$$

これらより、$\varphi_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$ は規格直交し、完全列であるといえる。

iii). $r(x) = f(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ として $||r||^2 =< r, r >$ を最小にする c_n は何か求めよ

$$
\begin{aligned}
< r, r > &= < f - \sum c_n \varphi_n, f - \sum c_n \varphi_n > && (18)\\
&= < f, f > - < f, \sum c_n \varphi_n > && (19)\\
&\qquad - < \sum c_n \varphi_n, f > + < \sum c_n \varphi_n, \sum c_n \varphi_n > && (20)\\
&= < f, f > - \sum c_n < f, \varphi_n > - \sum c_n^* < \varphi_n, f > + \sum c_n^* c_n && (21)
\end{aligned}
$$

ここで、$||r||$ が最小になる場合、$\dfrac{\partial ||r||}{\partial c_n} = \dfrac{\partial ||r||}{\partial c_n^*} = 0$ となるので、
$\left(\dfrac{\partial ||r||}{\partial \alpha_n} = \dfrac{\partial ||r||}{\partial \beta_n} = 0, \quad (c_n = \alpha_n + i\beta_n) \text{と同値} \right)$

$$
\frac{\partial ||r||}{\partial c_n^*} = - < \varphi_n, f > + c_n = 0 \qquad (22)
$$

よって

$$
\begin{aligned}
c_n &= < \varphi_n, f > && (23)\\
&= \int_b^a \varphi_n(x)^* f(x) dx && (24)\\
& && (25)
\end{aligned}
$$

のときに $||r||$ は最小になる。

ii) の場合だと

$$
\begin{aligned}
c_n &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}\right)^* f(x) dx && (26)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx && (27)
\end{aligned}
$$

2. $f(x) = \cos zx$ を $-\pi \leq x \leq \pi$ で三角展開し $x = \pi$ として、$\cot \pi z$ の部分分数展開を求めよ.

三角級数係数を求める.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos zx \; dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{z}\sin zx\right]_{-\pi}^{\pi} && (28)\\
&= \frac{1}{\pi z}\left(\sin \pi z - \sin\left(-\pi z\right)\right) && (29)\\
&= \frac{2\sin \pi z}{\pi z} && (30)\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos zx \cos nx \; dx && (31)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos\left(z+n\right) + \cos\left(z-n\right)\right) \; dx && (32)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(z+n\right)x}{z+n} + \frac{\sin\left(z-n\right)x}{z-n}\right]_{-\pi}^{\pi} && (33)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin\left(z+n\right)\pi}{z+n} + \frac{\sin\left(z-n\right)\pi}{z-n} - \frac{\sin\left(z+n\right)(-\pi)}{z+n} - \frac{\sin\left(z-n\right)(-\pi)}{z-n}\right) && (34)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(z+n\right)\pi}{z+n} + \frac{\sin\left(z-n\right)\pi}{z-n}\right) && (35)\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos zx \sin nx \; dx && (36)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin\left(z+n\right) + \sin\left(z-n\right)\right) \; dx && (37)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos\left(z+n\right)x}{z+n} - \frac{\cos\left(z-n\right)x}{z-n}\right]_{-\pi}^{\pi} && (38)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos\left(z+n\right)\pi}{z+n} - \frac{\cos\left(z-n\right)\pi}{z-n} + \frac{\cos\left(z+n\right)(-\pi)}{z+n} + \frac{\cos\left(z-n\right)(-\pi)}{z-n}\right) && (39)\\
&= 0 && (40)\\
& && (41)
\end{aligned}$$

よって

$$\cos zx = \frac{2\sin \pi z}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(z+n\right)\pi}{z+n} + \frac{\sin\left(z-n\right)\pi}{z-n}\right)\cos nx \qquad (42)$$

また、$x = \pi$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\cos z\pi &= \frac{2\sin \pi z}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(z\pi + n\pi\right)}{z+n} + \frac{\sin\left(z\pi - n\pi\right)}{z-n}\right)\cos n\pi && (43)\\
&= \frac{2\sin \pi z}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\sin z\pi}{z+n} + (-1)^n\frac{\sin z\pi}{z-n}\right)(-1)^n && (44)\\
&= \frac{2\sin \pi z}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin z\pi}{z+n} + \frac{\sin z\pi}{z-n}\right) && (45)
\end{aligned}$$

よって、$\cot z\pi$ の部分分数展開が次のように得られる。

$$\begin{aligned}
\cot z\pi &= \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} && (46)\\
&= \frac{2}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) && (47)
\end{aligned}$$

3.　次の偏微分方程式を変数分離の方法でとけ.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1)$$

初期条件

$$u(t=0,x,y) = xy(1-x)(1-y)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0,x,y) = 0$$

境界条件

$$u(t,x=0,y) = u(t,x=1,y) = u(t,x,y=0) = u(t,x,y=1) = 0$$

$u(t,x,y) = T(t)X(x)Y(y)$ とおき、与えられた偏微分方程式に代入すると、

$$XYT'' = a^2TX''Y + a^2TXY'' \tag{48}$$

これを次のように変形すると左辺は t のみの関数、右辺は x,y の関数となるので、両辺とも定数 (λ) となる

$$\frac{T''}{T} \;=\; a^2\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}\right) = \lambda \tag{49}$$

また、この右辺 $=\lambda$ についても、次のように x,y を分離でき、定数 (λ_x) とおける

$$\frac{X''}{X} = \frac{\lambda}{a^2} - \frac{Y''}{Y} = \lambda_x \tag{50}$$

よって

$$\frac{T''}{T} \;=\; \lambda(= a^2(\lambda_x + \lambda_y)) \tag{51}$$

$$\frac{X''}{X} \;=\; \lambda_x \tag{52}$$

$$\frac{Y''}{Y} \;=\; \lambda_y \tag{53}$$

X,Y については、境界条件 $X(0) = X(1) = Y(0) = Y(1) = 0$ を用いることにより、

$$\lambda_x = -m^2\pi^2, \quad X_m(x) \;=\; Cx_m \sin m\pi x \tag{54}$$

$$\lambda_y = -n^2\pi^2, \quad Y_n(y) \;=\; Cy_n \sin n\pi y \tag{55}$$

となる。ただし、Cx_m, Cy_n は定数、$m = 1,2,3,\cdots,\ n = 1,2,3,\cdots$ である。

この λ_x, λ_y に対して $T(t)$ は、$\lambda = -a^2(m^2+n^2)\pi$ なので、

$$T_{mn}(t) = Ct_{1mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\ \pi at + Ct_{2mn}\sin\sqrt{m^2+n^2}\ \pi at \tag{56}$$

となる。初期条件 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t=0,x,y) = 0$ より、$T'(0) = 0$ となるので $Ct_{2mn} = 0$. よって

$$T_{mn}(t) = Ct_{1mn}\cos\sqrt{m^2+n^2}\ \pi at \tag{57}$$

こうして境界条件と初期条件を満たす解を得る。

$$u_{mn}(t,x,y) = C_{mn}\sin m\pi x \sin n\pi y \cos\sqrt{m^2+n^2}\ \pi at \tag{58}$$

ただし、C_{mn} は、$C_{mn} = Ct_{1mn} \times Cx_m \times Cy_n$ より与えられる定数。

よって、境界条件と速度の初期条件を満たす一般解はこれらを重ね合わせた次の式で得られる。

$$u(t,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y \cos\sqrt{m^2+n^2}\ \pi a t \tag{59}$$

これが、位置の初期条件 $u(t=0,x,y) = xy(1-x)(1-y)$ を満たすためには、

$$u(0,x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin m\pi x \sin n\pi y = xy(1-x)(1-y) \tag{60}$$

が成り立つ必要がある。

ここで

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin n\pi y \tag{61}$$

とおくと、式 (60) は

$$xy(1-x)(1-y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin m\pi x \tag{62}$$

とおける。

これらはフーリエ正弦級数であるので、それぞれ式 (61)、式 (62) から次の式を得る。

$$\begin{aligned} C_{mn} &= 2\int_0^1 C_m \sin n\pi y dy & (63)\\ C_m &= 2\int_0^1 xy(1-x)(1-y)\sin m\pi x dx & (64) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} C_{mn} &= 2\int_0^1 2\left(\int_0^1 xy(1-x)(1-y)\sin m\pi x dx\right)\sin n\pi y\ dy & (65)\\ &= 4\int_0^1\int_0^1 xy(1-x)(1-y)\sin m\pi x \sin n\pi y\ dx\ dy & (66)\\ &= 4\int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x\ dx \int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\ dy & (67) \end{aligned}$$

x の積分について計算する。

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x\ dx &= \left[-x(1-x)\frac{\cos m\pi x}{m\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 -(1-2x)\frac{\cos m\pi x}{m\pi}\ dx & (68)\\ &= 0 + \int_0^1 (1-2x)\frac{\cos m\pi x}{m\pi}\ dx & (69)\\ &= \left[(1-2x)\frac{\sin m\pi x}{(m\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 -2\ \frac{\sin m\pi x}{(m\pi)^2}\ dx & (70)\\ &= 0 - \left[2\ \frac{\cos m\pi x}{(m\pi^3)}\right]_0^1 & (71)\\ &= \frac{2}{(m\pi)^3}(1-\cos m\pi) & (72) \end{aligned}$$

y の積分についても同様に計算する。

$$\int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\ dy = \frac{2}{(n\pi)^3}(1-\cos n\pi) \tag{73}$$

よって

$$C_{mn} = 4\int_0^1 x(1-x)\sin m\pi x\ dx \int_0^1 y(1-y)\sin n\pi y\ dy \tag{74}$$

$$= 16\frac{1-\cos m\pi}{(m\pi)^3}\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^3} \tag{75}$$

結局、すべての条件を満たす解は

$$u(t,x,y) = 16\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos m\pi}{(m\pi)^3}\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^3}\sin m\pi x\sin n\pi y\cos\sqrt{m^2+n^2}\ \pi at \tag{76}$$