数学２Ｃ (水曜２限、10:15　11:45）第十回レポート解答例

1.　三角級数展開におけるパーセバルの等式を直接示せ

$f(x)$ は、周期 2π の関数で $[-\pi,\pi]$ で滑らかとする。証明すべきパーセバルの等式は

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx \tag{3}$$

ここで、$f(x)$ を三角級数展開すると

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{4}$$

よって、

$$f(x)^2=\frac{a_0^2}{4}+a_0\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+a_0\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)^2 \tag{5}$$

ここで、$(\cos nx,\sin nx)$ は直交関数系なので、（積→和の公式で証明可）

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4}\;dx = \frac{a_0^2}{2} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\;dx = 0 \tag{7}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\;dx = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nx\;dx = 1 \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin nx\;dx = 1 \tag{10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\;dx = 0\quad(n\neq m) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\;dx = 0\quad(n\neq m) \tag{12}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\;dx = 0 \tag{13}$$

よって、パーセバルの等式の左辺に式 (5) を代入することにより、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx \tag{14}$$

$$= \frac{a_0^2}{2}+0+0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)+0+0+\cdots \tag{15}$$

$$= \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) \tag{16}$$

2. $f(x)=x$について

i). $-\pi \le x \le \pi$で三角級数展開せよ

三角級数係数を求める。

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} && (17)\\
&= 0 && (18)\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\ dx && (19)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\ \frac{1}{n}\ \ \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\ dx && (20)\\
&= \frac{1}{\pi}\ 0 + \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} && (21)\\
&= \frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi - \cos\left(-n\pi\right)\right) && (22)\\
&= 0 && (23)\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\ dx && (24)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\ \left(-\frac{1}{n}\ \ \cos nx\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n}\cos nx\ dx && (25)\\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi + \pi\cos\left(-n\pi\right)\right) + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} && (26)\\
&= -\frac{2\pi\cos n\pi}{n\pi} + 0 && (27)\\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} && (28)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin nx && (29)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx && (30)
\end{aligned}$$

ii). $0 \le x \le 2\pi$で三角級数展開せよ

三角級数係数を求める。

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{2}\ (2\pi)^2 && (31)\\
&= 2\pi && (32)\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos n(x-\pi)\ dx && (33)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\ \frac{1}{n}\ \ \sin n(x-\pi)\right]_{0}^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi}\frac{1}{n}\sin n(x-\pi)\ dx && (34)\\
&= \frac{1}{\pi}\ 0 + \left[\frac{1}{n^2}\cos n(x-\pi)\right]_{0}^{2\pi} && (35)
\end{aligned}$$

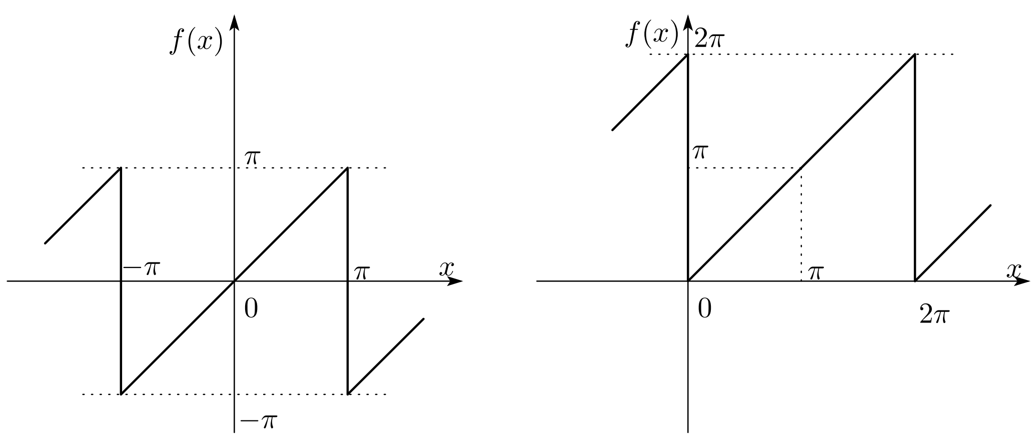
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi - \cos\left(-n\pi\right)\right) && (36)\\
&= 0 && (37)\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \sin n(x-\pi)\ dx && (38)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[x\ \left(-\frac{1}{n}\ \cos n(x-\pi)\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{1}{n}\cos n(x-\pi)\ dx && (39)\\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(2\pi\cos n\pi + 0\right) + \left[\frac{1}{n^2}\sin n(x-\pi)\right]_0^{2\pi} && (40)\\
&= -\frac{2\pi\cos n\pi}{n\pi} + 0 && (41)\\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n} && (42)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}\sin n(x-\pi) && (43)\\
&= \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx && (44)
\end{aligned}
$$

iii). $x \to \pi$ としたときの振るまいを調べよ

i),ii) より、式 (30)、式 (44) が表すグラフはそれぞれ下図の左、右となる。



よって、i) のとき は（左図）

$x \to -\pi$ では $f(x) \to \pi$

$x \to +\pi$ では $f(x) \to -\pi$

ただし、

$x = 0$ では、$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(\pi+0) + f(\pi-0)\right) = 0$ となる。

また、ii) では（右図）

$x \to \pm\pi$ で、 $f(x) \to \pi$

3. $f(x) = e^{-a|x|}$, $a \geq 0$ をフーリエ変換せよ. また、$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x)]$ として、$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int dk\ e^{ikx}\tilde{f}(k)$ を直接計算し、$f(x)$ になることを示せ.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\ dx && (45)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}(\cos kx + i\sin kx)\ dx && (46)\\ &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos kx\ dx && (47)\end{aligned}$$

ここで $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos kx$ とおくと

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty e^{-ax}\cos kx\ dx && (48)\\ &= \left[e^{-ax}\frac{1}{k}\sin kx\right]_0^\infty + \int_0^\infty ae^{-ax}\frac{1}{k}\sin kx\ dx && (49)\\ &= 0 + \frac{a}{k}\int_0^\infty e^{-ax}\sin kx && (50)\\ &= \frac{a}{k}\left[e^{-ax} - \frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\infty - \frac{a}{k}\int_0^\infty ae^{-ax}\frac{1}{k}\cos kx\ dx && (51)\\ &= \frac{a}{k^2}(e^0\cos 0) - \frac{a^2}{k^2}\int_0^\infty e^{-ax}\cos kx\ dx && (52)\\ &= \frac{a}{k^2} - \frac{a^2}{k^2}I && (53)\end{aligned}$$

よって、

$$I = \frac{a}{k^2+a^2} \tag{54}$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = 2I = \frac{2a}{k^2+a^2} \tag{55}$$

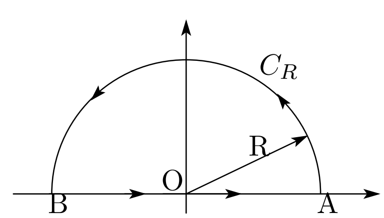
次に逆変換を考える。
フーリエ逆変換を具体的に書くと

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} \tag{56}$$

$x \geq 0$ のとき、$g(k) = e^{ikx}\dfrac{2a}{k^2+a^2}$ とおいて

右図に示す曲線 C_R について $\displaystyle\int_{C_R} g(z)dz$ を考える。

$(R \to \infty)$



よって、留数定理より

$$\int_{C_R} g(z)dz = \int_{\text{弧 }AB} g(z)dz + \int_{\text{直線 }AB} g(z)dz = Res(g(ia)) \tag{57}$$

弧 AB 上での積分は、$x \geq 0$ より、ジョルダンの補助定理より 0。
また、$z = ia$ での留数は

$$\begin{aligned} Res(g(ia)) &= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{2a}{z^2+a^2}e^{izx} && (58)\\ &= \lim_{z\to ia}\frac{2a}{z+ia}e^{izx} && (59)\\ &= \frac{2a}{ia+ia}e^{iiax} && (60)\\ &= \frac{1}{i}e^{-ax} && (61)\\ & && (62) \end{aligned}$$

よって、式 (57) より、

$$\begin{aligned} 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} &= 2\pi i\frac{1}{i}e^{-ax} && (63)\\ &= 2\pi e^{-ax} && (64) \end{aligned}$$

よって、$x \geq 0$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} = e^{-ax} \tag{65}$$

また、$x \leq 0$ のときは、$h(x) = e^{-ixz}\frac{2a}{z^2+a^2}$ として、$\int_{C_R} h(z)dz$ を考える。
$x \geq 0$ と同様に、留数定理より

$$\int_{C_R} h(z)dz = \int_{\text{弧 }AB} h(z)dz + \int_{\text{直線 }AB} h(z)dz = Res(g(ia)) \tag{66}$$

弧 AB 上での積分は $-x \geq 0$ よりジョルダンの補助定理より 0。
また、$z = ia$ での留数は

$$\begin{aligned} Res(g(ia)) &= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{2a}{z^2+a^2}e^{-izx} && (67)\\ &= \lim_{z\to ia}\frac{2a}{z+ia}e^{-izx} && (68)\\ &= \frac{2a}{ia+ia}e^{-iiax} && (69)\\ &= \frac{1}{i}e^{ax} && (70)\\ & && (71) \end{aligned}$$

よって、式 (66) より、

$$\begin{aligned} 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} &= 2\pi i\frac{1}{i}e^{ax} && (72)\\ &= 2\pi e^{ax} && (73) \end{aligned}$$

また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} = \int_{\infty}^{-\infty} -dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} \tag{74}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} \tag{75}$$

より、$x \leq 0$ のとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} = e^{ax} \tag{76}$$

式 (65)、式 (76) より、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\frac{2a}{k^2+a^2} = e^{-a|x|} = f(x) \tag{77}$$

よって、確かにフーリエ逆変換によって $f(x)$ に戻る。

別解

3. の前半は以下のようにも求めることができる。

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}\ dx \tag{78}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{ikx}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{ikx} \tag{79}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a+ik)x}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-a+ik)x}\ dx \tag{80}$$

$$= \left[\frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-a+ik)x}}{-a+ik}\right]_{0}^{\infty} \tag{81}$$

$$= \frac{1}{a+ik} - 0 + 0 - \frac{1}{-a+ik} \tag{82}$$

$$= \frac{2a}{k^2+a^2} \tag{83}$$