数学２Ｃ (水曜２限、10:15　11:45）第一回レポート解答例 (TA 山田和彦君)

1. オイラーの公式を使い $e^{i\alpha}, e^{i\beta}$ を計算することにより三角関数の加法定理を導け

まず、

$$e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \tag{1}$$

また、

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta \tag{2}$$

より

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \times e^{i\beta} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) && (3) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) && (4) \end{aligned}$$

よって、式 (1),(4) の実部、虚部をそれぞれ比較すると

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && (5) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta && (6) \end{aligned}$$

2. 複素平面上で定義された次の関係式について以下の問いに答えよ。

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0, \quad a, c \in \mathrm{R}$$

1) これが円となる条件は何か。また、その時の半径と中心を求めよ。

$a \neq 0$ のとき、与式は

$$\begin{aligned} z\bar{z} + \frac{b}{a}\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 && (7) \\ (z + \frac{b}{a})(\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}) - \frac{b\bar{b}}{a^2} + \frac{c}{a} &= 0 && (8) \\ \left| z + \frac{b}{a} \right|^2 &= \frac{|b|^2}{a^2} - \frac{c}{a} && (9) \end{aligned}$$

と変形できるので、$a \neq 0, \dfrac{|b|^2}{a^2} - \dfrac{c}{a} > 0$ のときに円となる。

また、その半径は $\sqrt{\dfrac{|b|^2}{a^2} - \dfrac{c}{a}}$、中心は $-\dfrac{b}{a}$ である。

2) これが直線となる条件は何か

$a=0$ のとき、与式は

$$b\bar{z}+\bar{b}z+c=0 \tag{10}$$

また、$b\neq 0$ のとき、さらに

$$\begin{aligned} \frac{z}{b}+\frac{\bar{z}}{\bar{b}}+\frac{c}{b\bar{b}} &= 0 \qquad (11)\\ \left(\frac{z}{b}\right)+\overline{\left(\frac{z}{b}\right)} &= -\frac{c}{|b|^2} \qquad (12) \end{aligned}$$

となるので、$\dfrac{z}{b}$ は実軸に垂直な直線を描く。
直線を拡大、回転したものも直線であるので、$a=0, b\neq 0$ の場合に与式は直線となる。

3. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1000}\times\dfrac{1}{2^{1000}}$ を求めよ。

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)=2\ \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\ (\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2\ e^{i\frac{\pi}{3}} \tag{13}$$

より

$$\begin{aligned} \left(1+i\sqrt{3}\right)^{1000}\times\frac{1}{2^{1000}} &= 2^{1000}\times(e^{i\frac{\pi}{3}})^{1000}\times\frac{1}{2^{1000}} \qquad (14)\\ &= e^{i\frac{1000}{3}\pi}=e^{i\frac{4}{3}\pi+332\pi} \qquad (15)\\ &= \cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi \qquad (16)\\ &= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (17) \end{aligned}$$