数学２Ｃレポート課題4 (7/4分)

平成13年7月11日

問1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

を

$$\text{境界条件：} \qquad u(t=0,x) = x(1-x) \tag{2}$$
$$\text{初期条件：} \qquad u(t,x=0) = u(t,x=1) = 0 \tag{3}$$

の下で解け。

解答１

K の符号についてとくに指定はないが、以下 $K>0$ と仮定する。($K<0$ の場合でも、時間反転 $t\to -t$ を施せば $K<0$ とできる。また、普通考える物理的な状況では $K<0$ である。)

変数分離された形 $T(t)X(x)$ を仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt}X &= KT\frac{d^2X}{dx^2} \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{dt}/T &= K\frac{d^2X}{dx^2}/X. \end{aligned} \tag{4}$$

左辺は t のみの関数で、右辺は x のみの関数であるから、両者が等しいとすればそれは定数 (C) でなくてはならない。よって、

$$\frac{dT}{dt}=CT, \qquad \frac{d^2X}{dx^2}=\frac{C}{K}X. \tag{5}$$

これを解いて、

$$T(t) = C'e^{Ct} \tag{6}$$

を得る。一方、X に関しては、$C<0$ の場合

$$X(x) = A\sin\sqrt{\frac{-C}{K}}x+B\cos\sqrt{\frac{-C}{K}}x. \tag{7}$$

および、$C>0$ の場合

$$X(x) = A\exp\sqrt{\frac{-C}{K}}x+B\exp-\sqrt{\frac{-C}{K}}x. \tag{8}$$

の二つのケースが考えられるが、後者に関して両端での境界条件を考えると、$C=0$ となってしまいナンセンス。よって $C<0$ を考える。

両端で 0 の境界条件から、$\sqrt{\frac{-C}{K}}=n\pi,\, n\in\mathcal{Z}$ でなくてはならないので、$C=-Kn^2\pi^2$ と離散的な値をとるべきである。以上より、境界条件を満たす解として、

$$u(t,x)=C_ne^{-Kn^2\pi^2t}\sin n\pi x \tag{9}$$

が得られる。

解は、可能な n に関しての重ね合わせとして表すことが出来る：

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-Kn^2\pi^2t}\sin n\pi x. \tag{10}$$

この級数の係数を、初期条件を再現するように選べばよい。そのために、x(1-x) を

$$x(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\pi x \tag{11}$$

のように展開することを考える。両辺に $\sin m\pi x$ をかけて、$\int_0^1 dx$ をすると、

$$\int_0^1 dx x(1-x)\sin m\pi x = B_m/2 \tag{12}$$

を得る。(公式：

$$\int_0^1 dx \sin m\pi x \sin n\pi x = 0(\text{for } n \neq m) \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2}(\text{for } n = m) \tag{14}$$

に注意。)

よって、

$$\begin{aligned} B_m/2 &= \int_0^1 dx x \sin m\pi x - \int_0^1 dx x^2 \sin m\pi x \\ &= \frac{x}{-m\pi}\cos m\pi x|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{1}{-m\pi}\cos m\pi x \\ &- \left[\frac{x^2}{-m\pi}\cos m\pi x|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{2x}{-m\pi}\cos m\pi x\right] \\ &= \frac{2x}{-(m\pi)^2}\sin m\pi x|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{2}{-(m\pi)^2}\sin m\pi x \\ &= \frac{2}{(m\pi)^3}(-(-)^m + 1) \end{aligned} \tag{15}$$

これより C_n が求まり、

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}(1-(-)^n)\sin n\pi x e^{-Kn^2\pi^2 t}. \tag{16}$$