数学２Ｃレポート課題3 (6/20分)

平成 13 年 7 月 7 日

問1

$f(x) := x, x \in (-\pi, \pi)$ を三角級数に展開せよ。

問2

問１＋ Perseval の等式を用いて、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を計算せよ。

問3

$f(x) := \cos(\mu x), x \in (-\pi, \pi)$ を三角級数に展開せよ。

問4

$f(x) := e^{-|x|}$ の Fourier 変換を求めよ。

問5

問４について、Perseval 直接 check。

解答１

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

のかたちに展開する。展開係数は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x \cos nx = 0 && (2) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x \sin nx = \frac{-2}{n}\cos n\pi = \frac{-2}{n}(-)^n && (3) \\ & && (4) \end{aligned}$$

で与えられる。よって、

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}. \tag{5}$$

解答２

Parseval の等式

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx |f(x)|^2 \tag{6}$$

を、問１の三角級数展開に適用すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0^2 + \left(\frac{-2}{n}(-)^n\right)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx |x|^2 && (7) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-2}{n}(-)^n\right)^2\right] && (8) \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. && (9) \end{aligned}$$

解答３

$\cos \mu x$ は、$\mu \in \mathcal{Z}$ のとき、既に三角級数に展開させている。$\mu \notin \mathcal{Z}$ のとき、

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos \mu x \cos nx \tag{10}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}}{2} \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{2\mu}{\pi}(-)^n \sin \mu\pi \frac{1}{\mu^2 - n^2} \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \cos\mu x \sin nx = 0 \tag{13}$$

よって、

$$\cos\mu x = \frac{\sin\mu\pi}{\pi\mu} + \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{\mu^2-n^2}\cos nx. \tag{14}$$

解答4

$$\begin{aligned}
\overline{f}(k) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}e^{-|x|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right) dx e^{ikx}e^{-|x|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{ik+1}e^{ikx+x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{ik-1}e^{ikx+x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{k^2+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

解答5

Parseval の等式は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk|f(k)|^2 \tag{16}$$

である。これを両辺を直接計算することで確かめる。まず、右辺は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right) dx e^{-2|x|} = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{0}^{\infty} = 1 \tag{17}$$

一方、左辺は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk|\overline{f}(k)|^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\frac{1}{(k^2+1)^2}. \tag{18}$$

この積分を実行するため、次の複素積分を考える。

$$\frac{2}{\pi}\int_{\Gamma_1} dz\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{\pi}\int_{\Gamma_1} dz\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} \tag{19}$$

留数の定理より、

$$\frac{2}{\pi}\int_{\Gamma_1} dz\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{2}{\pi}\cdot 2\pi i \mathrm{Res}_{z=i} = \frac{2}{\pi}\cdot 2\pi i\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}|_{z=i} = 4i\cdot\frac{1}{4i} \tag{20}$$

Im

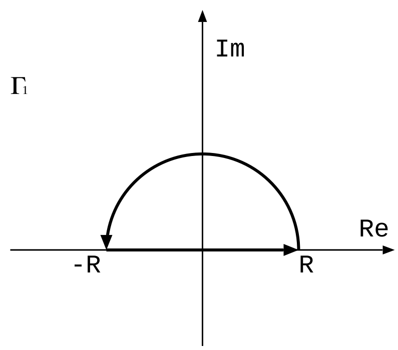

図 1: 積分路 Γ_1

例によって、円弧上の積分は $\to 0$ as $R \to 0$ であり、この複素積分は、求めたい積分に一致するので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |\overline{f}(k)|^2 = 1 \tag{21}$$

よって、Parseval の等式が確認された。