数学２C レポート課題2 (5/23 分)

平成 13 年 6 月 26 日

問 1

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}, \qquad (a > 0) \tag{1}$$

を計算せよ。

問 2

$$J := \int_{0}^{\infty} dx \frac{\log x}{x^2 + a^2}, \qquad (a > 0) \tag{2}$$

を計算せよ。

問 3

$$K := \int_{0}^{\infty} dx \frac{x^{-\alpha}}{1 + x}, \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3}$$

を計算せよ。

解答１

複素積分

$$I' := \int_{\Gamma_1} dz \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \int_{\Gamma_1} dz \frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2} \tag{4}$$

を考える。(積分路は下図参照) 被積分関数は積分路の囲む領域内で $z = ai$ に２位の極を持つので、留数の定理より、

$$I' = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=ai} = 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+ai)^2}|_{z=ai} = 2\pi i(-2)(ai+ai)^{-3} = \frac{\pi}{2a^3}. \tag{5}$$

$R \to \infty$ で円周部分の積分は 0 になり、実軸上の積分のみが残るので、これが求める答え。

解答２

複素積分

$$J' := \int_{\Gamma_2} dz \frac{\ln z}{z^2+a^2} \tag{6}$$

を考える。留数の定理より、

$$J' = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=ai} = 2\pi i \frac{\ln ai}{2ai} = \frac{\pi}{a}(\ln a + (1/2+2n)i\pi) \tag{7}$$

一方、

$$J' = \int_{-\infty}^{-\epsilon} dz \frac{\ln z}{z^2+a^2} + \int_{\pi}^{0} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \frac{\ln \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon^2 e^{2i\theta}+a^2} + \int_{-\epsilon}^{-\infty} dz \frac{\ln z}{z^2+a^2} \tag{8}$$

ただし、$R \to \infty$ で 0 の部分は落した。

$$(第２項) = \int_{\pi}^{0} \epsilon i e^{i\theta} d\theta \frac{\ln \epsilon e^{i\theta}}{\epsilon^2 e^{2i\theta}+a^2} = \epsilon i e^{i\theta} \int_{\pi}^{0} d\theta \frac{\ln \epsilon + i\theta}{\epsilon^2 e^{2i\theta}+a^2} \stackrel{\epsilon\to 0}{\to} 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(第１項) &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} dz \frac{\ln z}{z^2+a^2} = -\int_{\infty}^{\epsilon} dz \frac{\ln(-z)}{z^2+a^2} \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{\ln z}{z^2+a^2} + (2n-1)i\pi \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{1}{z^2+a^2} \end{aligned}\tag{10}$$

最後の積分は、問１と同様に $\int_0^\infty \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z+ai)(z-ai)} = \frac{1}{2} 2\pi i \frac{1}{2ai}$ と評価できる。以上より、

$$J' \stackrel{R\to\infty, \epsilon\to 0}{\to} 2\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{x^2+a^2} + \frac{i(2n-1)\pi^2}{2a} \tag{11}$$

なので、これを留数定理による計算と比較して、

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{x^2+a^2} = -\frac{i\pi^2}{4a} + \pi\frac{\ln ai}{2a} = -\frac{i\pi^2}{4a} + \frac{\pi \ln a}{2a} + \frac{i\pi^2/2}{2a} = \frac{\pi \ln a}{2a}. \tag{12}$$

ln の多価性は、最終的な答えにはでてこないことに注意。

解答3

複素積分

$$K' := \int_{\Gamma_3} dz \frac{z^{-\alpha}}{1+z} \tag{13}$$

を考える。留数の定理より、

$$K' = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1} = 2\pi i (-1)^{-\alpha} \tag{14}$$

一方、

$$K' = \int_0^\infty dx \frac{x^{-\alpha}}{1+x} + \int_\infty^0 dx \frac{x^{-\alpha} e^{-2\pi i \alpha}}{1+x} = (1 - e^{-2\pi i \alpha})K. \tag{15}$$

ここで、多価関数 $x^{-\alpha}$ の branch cut を実軸上 $\Re z > 0$ にとったことに注意。したがって、第一象現と第二象現では、$x^{-\alpha}$ の多価性を反映して、$e^{-2\pi i \alpha}$ だけ被積分関数が異なる．また、円周上の積分はそれぞれゼロ (as $R \to \infty, \epsilon \to 0$).

よって、

$$\begin{aligned} (1 - e^{-2\pi i \alpha})K &= 2\pi i e^{-i\pi\alpha} \\ \therefore K = \frac{\pi}{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}} &= \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}. \end{aligned} \tag{16}$$

Im

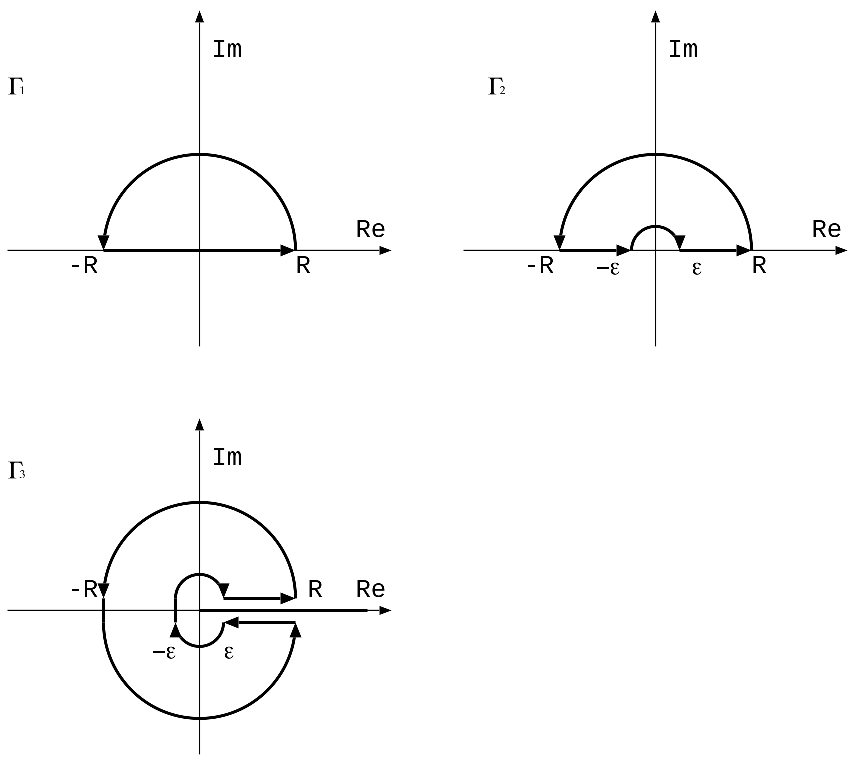

図 1: 積分路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.