数学２C レポート課題1 (4/25分)

平成13年6月26日

問1

複素平面において、中心 z_0 半径 r の円の方程式は、

$$z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0, \qquad B = -z_0, \qquad C = |z_0|^2 - r^2 \tag{1}$$

であることを示せ。

問2

複素平面上の２点 a, b からの距離の比が定数 $r < 1$ である点の集合が円となることを示せ。また、この円の半径が $\frac{r}{1-r}|a-b|$ であることを示せ。

問3

$(1-i)^{2+3i}$ を求めよ。

解答１

複素平面上で、中心 z_0 半径 r の円の方程式は、

$$|z - z_0|^2 = r. \tag{2}$$

これを変形すると、

$$z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z_0} = r^2. \tag{3}$$

解答２

$$\frac{|z-a|}{|z-b|} = r \tag{4}$$

を変形すると、

$$\begin{aligned} z\overline{z} - z\overline{a} - \overline{z}a + a\overline{a} &= r^2(z\overline{z} - z\overline{b} - \overline{z}b + b\overline{b}) \quad (5)\\ \therefore\ (1-r^2)z\overline{z} - z(\overline{a} - r^2\overline{b}) - \overline{z}(a - r^2 b) + (a\overline{a} - r^2 b\overline{b}) &= 0 \end{aligned}$$

となって、$z_0 = (a - r^2 b)/(1 - r^2)$, $C = (a\overline{a} - r^2 b\overline{b})/(1 - r^2)$ とおけば、問１よりこれは円の方程式を表す。また、

$$\begin{aligned} (\text{半径})^2 &= |z_0|^2 - C \quad (6)\\ &= \left|\frac{a - r^2 b}{1 - r^2}\right|^2 - \frac{a\overline{a} - r^2 b\overline{b}}{1 - r^2} = \left(\frac{r}{1-r}\right)^2 |a - b|^2. \end{aligned}$$

解答３

$a + bi$ の形に直す。

$$\begin{aligned} (1-i)^{2+3i} &= e^{(2+3i)\ln(1-i)} \quad (7)\\ &= e^{(2+3i)\left[\ln\sqrt{2} + i(-\pi/4 + 2n\pi)\right]}\\ &= e^{[\ln 2 + (3/4 - 6n)\pi] + i[3/2 \ln 2 + (-1/2 + 4n)\pi]}\\ &= 2e^{(3/4 - 6n)\pi}\\ &\times \left[\cos\left(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

ただし、$n \in \mathcal{Z}$.