第1回

Q1

二点 a, b からの距離の比が $r>1$ である点は円であることを示せ

解

$$
\begin{aligned}
& |z-b| = r|z-a| && \text{(アポロニウスの円)}\\
\Leftrightarrow\ & (r^2-1)\left|z-\frac{r^2a-b}{r^2-1}\right|^2 = \frac{r^2}{r^2-1}|a-b|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left|z-\frac{r^2a-b}{r^2-1}\right| = \frac{r}{r^2-1}|a-b|
\end{aligned}
$$

よって、z は中心 $\dfrac{r^2a-b}{r^2-1}$ で半径 $\dfrac{r}{r-1}|a-b|$ の円である。

Q2

$(-1)^{\frac{1}{6}}$ を求めよ

解

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\frac{1}{6}} &= (e^{i\pi+2\pi ni})^{\frac{1}{6}} && n\in\mathbf{Z}\\
&= e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{\pi}{3}ni}
\end{aligned}
$$

よって解は、$n=0,1,2,3,4,5$ の 6 個あり

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}+i}{2}\ (n=0),\quad i\ (n=1),\quad \frac{-\sqrt{3}+1}{2}\ (n=2),\\
&\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\ (n=3),\quad -i\ (n=4),\quad \frac{\sqrt{3}-i}{2}\ (n=5)
\end{aligned}
$$

と求まる。もちろん $z=(-1)^{1/6}$ とおいてやれば、$z^6=-1$ となり高校までの知識でも解けるが、i^i などより一般的な問題に対しては $z=e^{\log|z|+i\theta+2\pi ni}$ として考えるやり方が望ましい。例えば

例題 $(1+i)^i$ を求めよ

解

$$\begin{aligned}(1+i)^i &= (e^{\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}i+2\pi ni})^i \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi n}\cdot e^{i\frac{1}{2}\log 2}\end{aligned}$$

第2回

Q1

次の関数の正則性を議論せよ

(i) $f(z) = |z|$

(ii) $f(z) = \mathrm{Im}z$

(iii) $f(z) = z^*$

解

コーシー・リーマンの関係式

$$\begin{pmatrix} u_x - v_y = 0 \\ u_y + v_x = 0 \end{pmatrix}$$

で成否を確認する。

(i) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \neq 0 \quad (\text{x=0以外}) \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0 \neq 0 \quad (\text{y=0以外}) \end{pmatrix}$$

よって、$x \neq y \neq 0$ 以外は正則でない

$x = y = 0$ について、議論する。$y = mx$ にそって、$z \to 0$ とすると $u_x = 1/\sqrt{1 + m^2}$ となり、$u_x(0)$ が存在しない、したがって正則でない。

以上よりすべての z で正則でない

(ii) $f(z) = \mathrm{Im}z = y$

$$\begin{pmatrix} 0 - 0 = 0 \\ 1 + 0 \neq 0 \end{pmatrix}$$

よって、正則でない

(iii) $f(z) = z^* = x - iy$

$$\begin{pmatrix} 1 + 1 \neq 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{pmatrix}$$

よって、正則でない

補足

コーシー・リーマンの関係式は次のようにも表せる

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$$

これで成否を確認すると

(i) $f(z) = |z| = \sqrt{zz^*}$

$$\frac{\partial \sqrt{zz^*}}{\partial z^*} = \frac{z}{2|z|} \neq 0$$

よって、$x \neq y \neq 0$ 以外は正則でない。また、先ほどの議論により $x = y = 0$ でも正則でない

(ii) $f(z) = \mathrm{Im} z = (z - z^*)/2i$

$$\frac{\partial \frac{z-z^*}{2i}}{\partial z^*} = -\frac{1}{2i} \neq 0$$

よって、正則でない

(iii) $f(z) = z^*$

$$\frac{\partial z^*}{\partial z^*} = 1 \neq 0$$

よって、正則でない

となる

Q2

$f(z) = \exp z = X + iY$,　$z = x + iy$　　$X, Y, x, y \in \mathbf{R}$ が $|z| < \infty$ で正則であることを示せ

解

$$f(z) = \exp z = e^x e^{iy} = e^x \left(\cos y + i \sin y\right)$$

なので、

$$\begin{aligned} X &= e^x \cos y \\ Y &= e^x \sin y \end{aligned}$$

となる。正則性を調べるにはコーシー・リーマンの関係式で確認すればよいので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial x} - \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(e^x \cos y)}{\partial y} + \frac{\partial(e^x \sin y)}{\partial x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって正則である

Q3

$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ より、$\exp z_1 \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$ を示せ

解

$$\exp z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \quad , \quad \exp z_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z_2^k$$

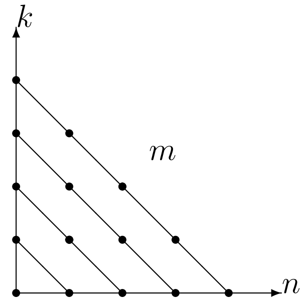
なので

$$\begin{aligned} \exp z_1 \exp z_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z_2^k \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!} z_1^n z_2^k \end{aligned}$$

ここで $n + k = m$ となる項だけまとめて考えると (図)

$$\begin{aligned} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!} z_1^n z_2^k &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!(m-n)!} z_1^n z_2^{m-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{m!} {}_m C_n z_1^n z_2^{m-n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z_1 + z_2)^m \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

よって成り立つことを示した



Q4

$(i^i)^i$ を求めよ

解

$$
\begin{aligned}
\left(i^i\right)^i &= \left((e^{\frac{\pi}{2}i+2\pi ni})^i e^{2\pi mi}\right)^i \qquad n \in \mathbf{Z} \\
&= (e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n} e^{2\pi mi})^i = e^{-\frac{\pi}{2}i-2\pi ni-2\pi m} \\
&= -ie^{-2\pi m} \qquad m \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

上記の解答では間に $e^{2\pi ni}$ を入れたが、これは主値をとるのと同値である。なぜなら

$$
\begin{aligned}
z^\alpha &= e^{\alpha \log z} = e^{\alpha \mathrm{Log} z+2\pi n\alpha i} \\
&= e^{\alpha \mathrm{Log} z} e^{2\pi\alpha i}
\end{aligned}
$$

となるからである。したがって

$$
\left(i^i\right)^i = i^{i\cdot i} = i^{-1} = -i
$$

とやるのは多価性を無視しているので間違いであり、間に $e^{2\pi ni}$ をいれることにより多価性がでてくることに注意したい。

第3回

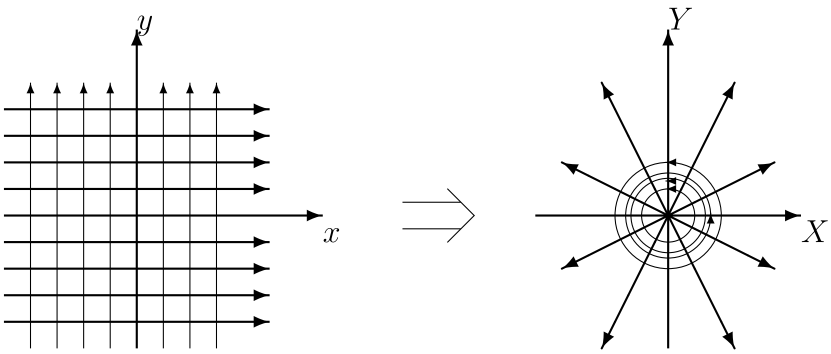
Q1

$w = f(z) = e^z$ について、Imz 一定、Rez 一定の直線群がどう写るか調べ、その等角性を議論せよ

解

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + \sin y) \equiv X + iY$$

Im$z = y$ 一定のとき
偏角が一定で大きさ e^x が変化する。したがって、原点から放射状に写る
Re$z = x$ 一定のとき
大きさが一定で、偏角が変化する。したがって、左回りの円に写る
図にすると



となり、明らかに等角性がたもたれている。また

$$\frac{dw}{dz} = e^z$$

より等角写像である

Q2

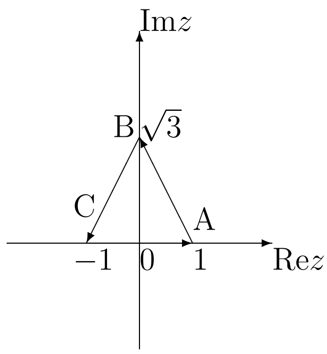
$\sin z = -2$ を解け

解

$$
\begin{aligned}
& \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -2 \\
\Leftrightarrow\ & e^{2iz} + 4ie^{iz} - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{iz} = (-2 \pm \sqrt{3})i \\
\Leftrightarrow\ & z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n - i\log(2 \pm \sqrt{3}) \qquad n \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

Q3

$I_1 = \int_{AB} z^2 dz,\ \ I_2 = \int_{BC} z^2 dz,\ \ I_3 = \int_{CA} z^2 dz$ をそれぞれ求め
$I_1 + I_2 + I_3 = 0$ を確かめよ。
また、 $J_1 = \int_{AB} |z|^2 dz,\ \ J_2 = \int_{BC} |z|^2 dz,\ \ J_3 = \int_{CA} |z|^2 dz$ についてはどうか



解

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{AB} z^2 dz \\
&= \int_1^0 \left((1-\sqrt{3}i)t + \sqrt{3}i\right)^2 (1-\sqrt{3}i)dt \qquad \leftarrow AB : z = t + (1-t)\sqrt{3}i \\
&= -\frac{1}{3} - \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{BC} z^2 dz \\
&= \int_0^{-1} \left((1+\sqrt{3}i)t + \sqrt{3}i\right)^2 (1+\sqrt{3}i)dt \quad \leftarrow BC : z = t + (1+t)\sqrt{3}i \\
&= -\frac{1}{3} + \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{CA} z^2 dz = \int_{-1}^{1} t^2 dt \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

よって

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

となる。
　また

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{AB} |z|^2 dz = \int_1^0 \left(t^2 + 3(1-t)^2\right)(1-\sqrt{3}i)dt \\
&= -\frac{4}{3}(1-\sqrt{3}i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_{BC} |z|^2 dz = \int_0^{-1} \left(t^2 + 3(1+t)^2\right)(1+\sqrt{3}i)dt \\
&= -\frac{4}{3}(1+\sqrt{3}i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \int_{CA} |z|^2 dz = \int_{-1}^{1} t^2 dt \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

よって

$$J_1 + J_2 + J_3 = -2$$

となる

補足

グリーン (ガウス) の定理

領域 D、その境界 ∂D は区分的に滑らかな曲線とすると、$f(z)$ が D,∂D において x, y で微分可能であれば

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2i\int_D \frac{\partial f(z)}{\partial z^*}dxdy$$

が成り立つ

証明)

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

とすると

$$\begin{aligned} x &= \frac{z+z^*}{2} \\ y &= \frac{z-z^*}{2i} \\ \frac{\partial}{\partial z^*} &= \frac{\partial x}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

なので

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} 2i\int_D \frac{\partial f(z)}{\partial z^*}dxdy &= i\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy + \int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \\ &= \oint_{\partial D} f(z)dx + i\oint_{\partial D} f(z)dy \qquad \text{(ガウスの定理)} \\ &= \int_{\partial D} f(z)dz \qquad \Box \end{aligned}$$

特に $\frac{\partial f(z)}{\partial z^*} = 0$ つまり正則のときは

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

となり、これを**コーシーの積分定理**という

これを用いると

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2i \int_D \frac{\partial z^2}{\partial z^*} dxdy = 0$$

$$\begin{aligned}
J_1 + J_2 + J_3 &= 2i \int_D \frac{\partial |z|^2}{\partial z^*} dxdy \\
&= 2i \int_D z dxdy \\
&= 2i \int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{3}(x+1)} dyx + 2i \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}(-x+1)} dyx \\
&\quad +2i \int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y/\sqrt{3}-1}^{-y/\sqrt{3}+1} dxiy \\
&= -2
\end{aligned}$$

と求まる

第4回

Q1

二次元ガウスの定理

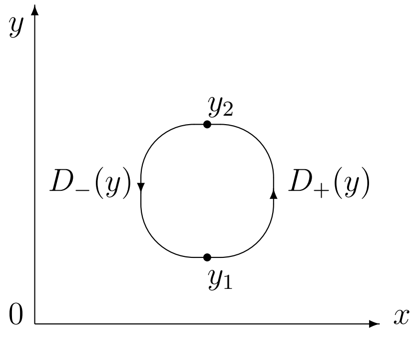
$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial A}{\partial x} dxdy &= \oint_{\partial D} Ady \\
\int_D \frac{\partial A}{\partial y} dxdy &= -\oint_{\partial D} Ady
\end{aligned}
$$

を示せ。ただし、∂D は円盤状の領域 (凸)D の境界である

解

下図のように D の境界 ∂D を $\partial D_+, \partial D_-$ にわけて考える

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial A}{\partial x} dxdy &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{\partial D_-(y)}^{\partial D_+(y)} dx \frac{\partial A}{\partial x} \\
&= \int_{y_1}^{y_2} dy \left[A(\partial D_-(y), y) - A(\partial D_+(y), y) \right] \\
&= \int_{y_1}^{y_2} dy A(\partial D_-(y), y) + \int_{y_2}^{y_1} dy A(\partial D_+(y), y) \\
&= \oint_{\partial D} Ady
\end{aligned}
$$



また同様にして

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial A}{\partial y} dxdy &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{\partial D_-(x)}^{\partial D_+(x)} dy \frac{\partial A}{\partial y} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dy \left[A(x, \partial D_-(x)) - A(x, \partial D_+(x)) \right] \\
&= -\int_{x_2}^{x_1} dy A(x, \partial D_-(x)) - \int_{x_1}^{x_2} dy A(x, \partial D_+(x)) \\
&= -\oint_{\partial D} Adx
\end{aligned}
$$

Q2

次の関数の極とそこでの留数を求めよ

(i) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+2z^2+1}$

(ii) $f(z)=\coth z$

(iii) $f(z)=\dfrac{e^{az}}{\cosh \pi z}$

解

(i) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4+2z^2+1}$

$$f(z)=\frac{z+1}{z^4+2z^2+1}=\frac{z+1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

なので、$z=\pm i$ が 2 位の極である。留数は

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(z)\Big|_{z=i} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[(z-i)^2f(z)]=-\frac{i}{4}\\ \mathrm{Res}f(z)\Big|_{z=-i} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[(z+i)^2f(z)]=\frac{i}{4}\end{aligned}$$

(ii) $f(z)=\coth z$

$$f(z)=\coth z=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}$$

なので

$$e^z-e^{-z}=0\Leftrightarrow z=\pi ni \qquad\qquad n\in\mathbf{Z}$$

が極になる。何位の極か調べると

$$\lim_{z\to\pi ni}\frac{z-\pi ni}{e^z-e^{-z}}=\pm 2$$

となり、1 位の極と求まる。よって留数は

$$\mathrm{Res}f(z)\Big|_{z=\pi ni} = \lim_{z\to\pi ni}[(z-\pi ni)f(z)]=1$$

(iii) $f(z) = \dfrac{e^{az}}{\cosh \pi z}$

$$f(z) = \frac{e^{az}}{\cosh \pi z} = \frac{2e^{az}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}$$

なので

$$e^{\pi z} + e^{-\pi z} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2n+1}{2} i \qquad\qquad n \in \mathbf{Z}$$

が極になる。何位の極か調べると

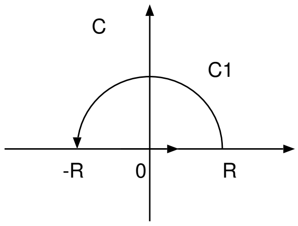
$$\lim_{z \to \frac{2n+1}{2} i} \frac{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}{z - \frac{2n+1}{2} i} = \pm 2\pi i$$

となり、1 位の極と求まる。よって留数は

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} f(z)\Big|_{z = \frac{2n+1}{2} i} &= \lim_{z \to \frac{2n+1}{2} i} (z - \frac{2n+1}{2} i) f(z) \\ &= \begin{cases} \frac{i}{\pi} e^{a \frac{2n+1}{2} i} & (n : 偶数) \\ -\frac{i}{\pi} e^{a \frac{2n+1}{2} i} & (n : 奇数) \end{cases} \end{aligned}$$

Q3

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\frac{1}{k^2+1}dk$ を下図の積分経路で求めよ



解

留数定理より

$$\begin{aligned}\int_C e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}dz &= 2\pi i\mathrm{Res}(z-i)e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}\bigg|_{z=i}\\ &= \pi e^{-x}\end{aligned}$$

また

$$\int_C e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}dz = \int_{-R}^{R} e^{ixk}\frac{1}{k^2+1}dk + \int_{C_1} e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}dz$$

である。ここで C_1 について、ジョルダンの補題でも収束を示せるが直接計算すると

$$\begin{aligned}\int_{C_1} e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}dz &= \int_0^{\pi} e^{ixRe^{i\theta}}\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}d\theta\\ &\leq \left|\int_0^{\pi} e^{ixRe^{i\theta}}\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}d\theta\right|\\ &\leq \int_0^{\pi}\left|e^{ixRe^{i\theta}}\frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+1}\right||d\theta|\\ &\leq \int_0^{\pi}\frac{Re^{-Rx\sin\theta}}{R^2-1}d\theta \qquad (\text{三角不等式}\ \ |R^2e^{2i\theta}| \leq |R^2e^{2i\theta}+1|+1)\\ &\leq \frac{\pi R}{R^2-1} \qquad (0 \leq x)\\ &\overset{R\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

よって

$$\int_C e^{ixz}\frac{1}{z^2+1}dz \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}\frac{1}{k^2+1}dk + 0$$

であるので

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}\frac{1}{k^2+1}dk = \pi e^{-x} \qquad\qquad (0 \leq x)$$

また、$x < 0$ のときは $k = -k^{'}$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}\frac{1}{k^2+1}dk &= -\int_{\infty}^{-\infty} e^{-ixk^{'}}\frac{1}{k^{'2}+1}dk^{'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk^{'}}\frac{1}{k^{'2}+1}dk^{'}\end{aligned}$$

となり同様の計算により

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk'}\frac{1}{k'^2+1}dk' = \pi e^{x}$$

と求まる。よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}\frac{1}{k^2+1}dk = \pi e^{-|x|}$$

である

第5回

Q1

次の関数 $f(z)$ の特異点とそこでの留数を求めよ

(i) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^3 z^2}$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

(iii) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^3}$

(iv) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z-a}$

解

(i) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)^3 z^2}$

$z=-1$ が3位の極、$z=0$ が2位の極である。留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=-1} &= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}[(z+1)^3 f(z)] = 5 \\
\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=0} &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}[z^2 f(z)] = -5
\end{aligned}$$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = \pi n \qquad\qquad n \in \mathbf{Z}$$

が極になる。何位の極か調べると

$$\lim_{z\to\pi n}\frac{z-\pi n}{\sin z} = (-1)^n$$

となり、1位の極と求まる。よって留数は

$$\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=\pi n} = \lim_{z\to\pi n}[(z-\pi n)f(z)] = (-1)^n$$

(iii) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^3}$

$z = 0$ が極になる。何位の極か調べると

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sinh z}{z} = 1$$

より、$z = 0$ が 2 位の極になる。留数は

$$\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} [z^2 f(z)] = 0$$

(iv) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z-a}$

$z = a, \pi n$ が 1 位の極である。留数は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=a} &= \lim_{z\to a} [(z-a) f(z)] = \cot a \\
\mathrm{Res} f(z)\Big|_{z=\pi n} &= \lim_{z\to \pi n} [(z-\pi n) f(z)] = \frac{1}{\pi n - a}
\end{aligned}$$

Q2

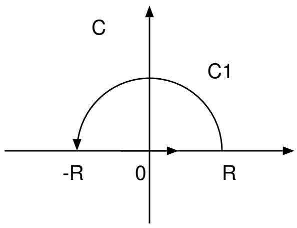
次の積分を求めよ

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}dx \qquad n=1,2,3,\cdots$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \qquad 0<p<1$

解

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}dx \qquad n=1,2,3,\cdots$



上図で考える。$z=e^{\frac{\pi n}{2n}+\frac{\pi k i}{n}}\,(k=0,1,2,\cdots n-1)$ で1位の極なので、留数定理より

$$
\begin{aligned}
\int_C\frac{1}{z^{2n}+1}dz &= 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Res}(z-e^{\frac{\pi n}{2n}+\frac{\pi k i}{n}})\frac{1}{z^{2n}+1}\bigg|_{z=e^{\frac{\pi n}{2n}+\frac{\pi k i}{n}}} \\
&= 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2nz^{2n-1}}\bigg|_{z=e^{\frac{\pi n}{2n}+\frac{\pi k i}{n}}} \\
&= 2\pi i\cdot\frac{-e^{\frac{\pi i}{2n}}}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\pi i k} \\
&= \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}
$$

ここで,C_1 についてジョルダンの補題から収束を導けるが直接計算すると

$$
\int_{C_1}\frac{1}{z^{2n}+1}dz = \int_0^{\pi}\frac{iRe^{i\theta}}{R^{2n}e^{2ni\theta}+1}d\theta
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad \int_0^{\pi} \left| \frac{iRe^{i\theta}}{R^{2n}e^{2ni\theta}+1} \right| |d\theta| \\
&\le \quad \int_0^{\pi} \frac{R}{R^{2n}-1} d\theta \quad (\text{三角不等式}) \\
&\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int_C \frac{1}{z^{2n}+1} dz \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1} dx + 0
$$

なので

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}
$$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \qquad 0 < p < 1$

$z = e^{i\theta}$ を導入すると

$$
\cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) \qquad d\theta = \frac{1}{iz} dz
$$

であるので、C : 単位円 として

$$
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \quad = \quad \frac{2}{ip} \oint_C \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{p}z + 1}
$$

となる。よって、C の領域で

$$
z = \frac{1}{p}(-1 + \sqrt{1-p^2})
$$

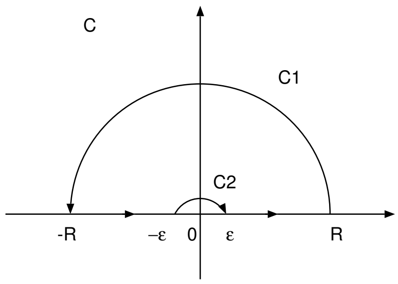
が1位の極になっている。したがって留数定理より

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \quad &= \quad \frac{2}{ip} \oint_C \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{p}z + 1} \\
&= \quad 2\pi i \cdot \frac{2}{ip} \mathrm{Res} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{p}z + 1} \\
&= \quad \frac{2\pi}{\sqrt{1-p^2}}
\end{aligned}
$$

第6回

Q1

下図で $\dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ を積分し $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2}$ を求めよ



解

$\dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ は上図で正則なので、コーシーの積分定理より

$$\int_C dz \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = 0$$

である。また

$$\int_C = \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{C_1} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_2}$$

である。ここでおのおの積分をみてみると

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} &= \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{1-e^{2ix}}{x^2} + \int_{-R}^{-\varepsilon} dx \frac{1-e^{2ix}}{x^2} \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{1-e^{2ix}}{x^2} + \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{1-e^{-2ix}}{x^2} \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{1-e^{2ix}+1-e^{-2ix}}{x^2} \\
&= 4\int_{\varepsilon}^{R} dx \frac{\sin^2 x}{x^2}
\end{aligned}$$

また

$$\left|\int_{C_1}\right| \leq \int_0^{\pi} \left|Re^{i\theta} d\theta\right| \left|\frac{1-e^{2iRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta}}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{\pi} d\theta \frac{1+1}{R} \qquad\qquad (\text{三角不等式}) \\
&= \frac{2}{R}\pi \overset{R\to\infty}{\to} 0 \qquad (\text{ジョルダンの補題})
\end{aligned}
$$

$$
\int_{C_2} = \int_{\pi}^{0} d\theta i \frac{1-e^{2i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} -2\pi
$$

よって、$R \to \infty,\ \varepsilon \to 0$ で

$$
\int_0^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}
$$

となる。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\int_0^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2}
$$

なので

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi
$$

と求まる

Q2

$f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2i)(3z+i)}$ について、ローラン展開を次の場合に求めよ

(i) $z=0$ のまわりで $|z| < \dfrac{1}{3}$

(ii) $z=0$ のまわりで $\dfrac{1}{3} < |z| < 2$

(iii) $z=0$ のまわりで $2 < |z|$

(iv) $z=2i$ のまわりで $|z-2i| < \dfrac{7}{3}$

(v) $z=2i$ のまわりで $\dfrac{7}{3} < |z-2i|$

(ただし $\dfrac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots, \qquad |a| < 1$ をつかえ)

解

$f(z)$ を部分分数分解すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+1}{(z-2i)(3z+i)} \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i} + \frac{1+3i}{3z+i}\right) \end{aligned}$$

(i) $z=0$ のまわりで $|z| < \dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i} + \frac{1+3i}{3z+i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{2-i}{2i}\frac{1}{1-z/2i} + \frac{1+3i}{i}\frac{1}{1-3iz}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots, \qquad |a| < 1$ を用いると、$|z/2i| < 1,\ |3iz| < 1$ なので

$$f(z) = \frac{1}{7}\left[\frac{1+2i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}i\right)^n + (3-i)\sum_{n=0}^{\infty}(3iz)^n\right]$$

となる

(ii) $z=0$ のまわりで $\frac{1}{3}<|z|<2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3z+i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{2-i}{2i}\frac{1}{1-z/2i}+\frac{1+3i}{3z}\frac{1}{1-(-i/3z)}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+\cdots, \qquad |a| < 1$ を用いると、
$|z/2i|<1, \ |-i/3z|<1$ なので

$$f(z)=\frac{1}{7}\left[\frac{1+2i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}i\right)^n+\frac{1+3i}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{3z}\right)^n\right]$$

となる

(iii) $z=0$ のまわりで $2<|z|$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3z+i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{2-i}{z}\frac{1}{1-2i/z}+\frac{1+3i}{3z}\frac{1}{1-(-i/3z)}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+\cdots, \qquad |a| < 1$ を用いると、
$|2i/z|<1, \ |-i/3z|<1$ なので

$$f(z)=\frac{1}{7}\left[\frac{2-i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n+\frac{1+3i}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{3z}\right)^n\right]$$

となる

(iv) $z=2i$ のまわりで $|z-2i|<\dfrac{7}{3}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3z+i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3(z-2i)+7i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{7i}\frac{1}{1-\frac{3i}{7}(z-2i)}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+\cdots,\qquad |a|<1$ を用いると、$\left|\frac{3i}{7}(z-2i)\right|<1$ なので

$$f(z)=\frac{1}{7}\left[\frac{2-i}{z-2i}+\frac{3-i}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3i(z-2i)}{7}\right)^n\right]$$

となる

(v) $z=2i$ のまわりで $\dfrac{7}{3}<|z-2i|$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3z+i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3(z-2i)+7i}\right) \\ &= \frac{1}{7}\left(\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3(z-2i)}\frac{1}{1-\frac{-7i}{3(z-2i)}}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{1}{1-a}=1+a+a^2+a^3+\cdots,\qquad |a|<1$ を用いると、$\left|\frac{-7i}{3(z-2i)}\right|<1$ なので

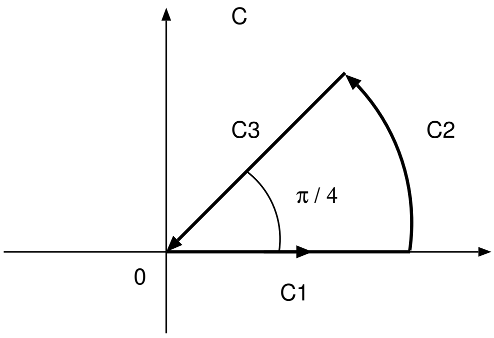
$$f(z) = \frac{1}{7}\left[\frac{2-i}{z-2i}+\frac{1+3i}{3(z-2i)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-7i}{3(z-2i)}\right)^n\right]$$

となる

第7回

Q1

下図で e^{-z^2} を積分し $\int_{-\infty}^{\infty} dx \sin x^2,\ \int_{-\infty}^{\infty} dx \cos x^2$ を求めよ



解

e^{-z^2} は上図で正則なので、コーシーの積分定理より

$$\int_C dz e^{-z^2} = 0$$

である。また

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

である。ここでおのおの積分をみてみると

$$\begin{aligned}\int_{C_1} &= \int_0^R dx e^{-x^2} \\ &\overset{R\to\infty}{\to} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(ガウス積分)}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2}\right| &\le \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta R e^{-R^2\cos 2\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{R}{2} e^{-R^2\cos\theta} \\ &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{R}{2} e^{-R^2(1-\frac{2}{\pi}\theta)} \\ &= \frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}) \overset{R\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

また、C_3 については $z = re^{\frac{\pi}{4}i}$ であるので

$$\begin{aligned}\int_{C_3} &= \int_R^0 \frac{1+i}{\sqrt{2}} dr e^{-r^2 i} \\ &= -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R dr(\cos r^2 - i \sin r^2)\end{aligned}$$

よって、$R \to \infty,\ \varepsilon \to 0$ で

$$\begin{aligned} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dx(\cos x^2 - i \sin x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Leftrightarrow\quad & \int_0^\infty dx(\cos x^2 - i \sin x^2) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

となり

$$\int_0^\infty dx \sin x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\int_0^\infty dx \cos x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

と求まる。よって

$$\int_{-\infty}^\infty dx \sin x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\int_{-\infty}^\infty dx \cos x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Q2

$\Gamma(1/2)$ を求めよ

解

$\Gamma(z)$ の定義は

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

であるので、$\Gamma(1/2)$ は

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}$$

ここで、$t = s^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
\Gamma(1/2) &= 2\int_0^\infty s ds e^{-s^2} s^{-1} \\
&= 2\int_0^\infty ds e^{-s^2} \\
&= \sqrt{\pi} \qquad \text{Gauss 積分}
\end{aligned}$$

Q3

$\int_0^1 dx x^5 (1-x)^8$ を求めよ

解

B 関数

$$B(x,y) = \int_0^1 dt t^{x-1}(1-t)^{y-1} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を利用する

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx x^5 (1-x)^8 &= B(6,9) \\
&= \frac{\Gamma(6)\Gamma(9)}{\Gamma(6+9)}
\end{aligned}$$

ここでΓ関数は

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbf{N}$$

であるので

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx x^5 (1-x)^8 &= B(6,9) \\ &= \frac{\Gamma(6)\Gamma(9)}{\Gamma(6+9)} \\ &= \frac{5!8!}{14!}\end{aligned}$$

と求まる

Q4

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^4 x \cos^5 x$ を求めよ

解

$\sin x = t$ とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin^4 x \cos^5 x = \int_0^1 dt t^4 (1-t^2)^2 \left(= \frac{8}{315} \qquad \text{直接計算}\right)$$

$t^2 = s$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt t^4 (1-t^2)^2 &= \frac{1}{2}\int_0^1 ds s^{\frac{3}{2}} (1-s)^2 \\ &= B(5/2, 3) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\pi}2!}{\frac{9}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{315}\end{aligned}$$

と求まる

ここで

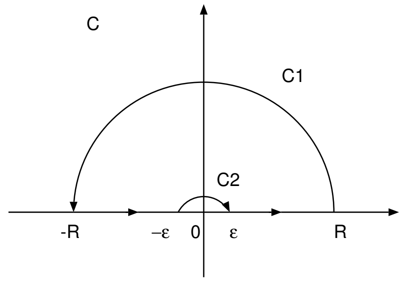
$$\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2n-3}{2}\frac{2n-5}{2}\cdots\frac{5}{2}\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$$

である

第8回

Q1

　下図で $\int_C dz \frac{\log z}{z^2+a^2} \quad a>0$ を積分することにより、$\int_0^\infty dx \frac{\log x}{x^2+a^2}$ を求めよ



解

$\frac{\log z}{z^2+a^2}$ は上図で $z=ai$ のとき一位の極なので、留数定理より

$$
\begin{aligned}
\int_C dz \frac{\log z}{z^2+a^2} &= 2\pi i \mathrm{Res} \frac{\log z}{z^2+a^2}\bigg|_{z=ai} \\
&= \frac{\pi}{a}\log ai \\
&= \frac{\pi}{a}\log a + \frac{2k-1}{2a}\pi^2 i \qquad k \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

である。ここで多価性の k があるがリーマン面上で考え、分枝をとめ、今は $k=0$ としよう。

　また

$$
\int_C = \int_{C_1} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_2} + \int_{\varepsilon}^{R}
$$

である。ここでおのおの積分をみてみると

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_1}\right| &\leq \int_0^\pi \left|iRe^{i\theta}d\theta\right| \left|\frac{\log R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}+a^2}\right| \\
&< \int_0^\pi d\theta R \frac{\log R + \theta}{R^2-a^2} \qquad \text{(三角不等式)} \\
&= \frac{R\log R}{R^2-a^2}\pi + \frac{R\pi^2}{2(R^2-a^2)} \overset{R\to\infty}{\to} 0
\end{aligned}
$$

また

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_2}\right| &< \int_\pi^0 d\theta\varepsilon\frac{\log\varepsilon+\theta}{\varepsilon^2-a^2}\\ &= -\frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon^2-a^2}\pi-\frac{\varepsilon\pi^2}{2(\varepsilon^2-a^2)}\overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{-\varepsilon} &= \int_\varepsilon^R dx\frac{\log(-x)}{x^2+a^2}\\ &= \int_\varepsilon^R dx\frac{\log x}{x^2+a^2}+\int_\varepsilon^R dx\frac{(2k-1)\pi i}{x^2+a^2}\\ &= \int_\varepsilon^R dx\frac{\log x}{x^2+a^2}-\int_\varepsilon^R dx\frac{\pi i}{x^2+a^2} \qquad (k=0)\end{aligned}$$

よって、$R\to\infty,\ \varepsilon\to 0$ で

$$2\int_0^\infty dx\frac{\log x}{x^2+a^2}-\pi i\int_0^\infty dx\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\log a-\frac{1}{2a}\pi^2 i$$

となり

$$\int_0^\infty dx\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$$

であるので

$$\begin{aligned}2\int_0^\infty dx\frac{\log x}{x^2+a^2} &= \frac{\pi}{a}\log a\\ \Leftrightarrow\int_0^\infty dx\frac{\log x}{x^2+a^2} &= \frac{\pi}{2a}\log a\end{aligned}$$

と求まる

Q2

$\delta_M = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M}^{M} e^{ixl} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin x(M+\frac{1}{2})}{\sin\frac{x}{2}}$ を導け

解

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-M}^{M} e^{ixl} &= \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{l=0}^{M} e^{ixl} + \sum_{l=0}^{M} e^{-ixl} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{ix(M+1)}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-ix(M+1)}}{1-e^{-ix}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{ixM}e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2}) + e^{-ixM}e^{-ix/2}(e^{ix/2}-e^{-ix/2})}{(e^{-ix/2}-e^{ix/2})(e^{ix/2}-e^{-ix/2})} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin x(M+\frac{1}{2})}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}
$$

第9回

Q1

(i) $f_1(x) = x^3$ を $[0, 2\pi]$ でフーリエ級数展開せよ

(ii) $f_2(x) = x^3$ を $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開せよ

(iii) それぞれについて $x \to \pi \pm 0$ の振舞を考えよ

(iv) それぞれについてパーセバルの関係式から何がでるか

解

(i)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx x^3 = 4\pi^3 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx x^2 \cos nx = \frac{12}{n^2}\pi \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx x^2 \sin nx = \frac{12}{n^3} - \frac{8}{n}\pi^2 \end{aligned}$$

よって

$$f_1(x) = 2\pi^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{n^2}\pi \cos nx + \left(\frac{12}{n^3} - \frac{8}{n}\pi^2\right) \sin nx$$

(ii)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 \cos nx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx x^2 \sin nx = \frac{12}{n^3}(-1)^n - \frac{2}{n}\pi^2(-1)^n \end{aligned}$$

よって

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2}{n}\pi^2\right)(-1)^n \sin nx$$

(iii) $x \Rightarrow \pi \pm 0$ の振舞を考える

$f_1(x)$ は $[0, 2\pi]$ を周期的に展開したものなので $x = \pi \pm 0$ で連続であるから

$$f_1(\pi \pm 0) = \pi^3$$

となる。これに対し $f_2(x)$ は $[-\pi, \pi]$ を周期的に展開したものであるので、$x = \pi - 0$ では連続で

$$f_2(\pi - 0) = \pi^3$$

$x = \pi + 0$ では接続点になるので

$$f_2(\pi + 0) = \frac{f_2(\pi - 0) + f_2(-\pi + 0)}{2} = \frac{\pi^3 - \pi^3}{2} = 0$$

となる。したがって $f_2(x)$ は $x = \pi$ で不連続だとわかる。

(iv) $f_1(x)$ におけるパーセバルの関係式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx|x^2|^2 &= \frac{1}{2}\left|4\pi^3\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{12}{n^2}\pi\right|^2 + \left|\frac{12}{n^3} - \frac{8\pi^2}{n}\right|^2 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{7}{9}\pi^6 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{n^6} - \frac{6}{n^4}\pi^2 + \frac{8}{n^2}\pi^4 \end{aligned}$$

また $f_2(x)$ におけるパーセバルの関係式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx|x^2|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2}{n}\pi^2\right)(-1)^n\right|^2 \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{7}\pi^6 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{72}{n^6} - \frac{24}{n^4}\pi^2 + \frac{2}{n^2}\pi^4 \end{aligned}$$

この二式と、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$ より

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} &= \frac{1}{90}\pi^4 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} &= \frac{1}{945}\pi^6 \end{aligned}$$

が求まる

Q2

$f(x) = \cos ax$ を $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開せよ

(i) $\pi \cot \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1} \dfrac{2z}{z^2 - n^2}$ を導け

(ii) $\dfrac{\pi z}{\sin \pi z} = 1 + 2z \displaystyle\sum_{n=1} \dfrac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$ を導け

解

$f(x) = \cos ax$ のフーリエ級数展開は

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-pi}^{\pi} dx \cos ax = 2\frac{\sin a\pi}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos ax \cos nx = 2\frac{a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}(-1)^n$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \cos a\pi \sin nx = 0$$

よって

$$f(x) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}(-1)^n \cos nx$$

となる

(i) $f(x)$ において、$x = \pi,\ a = z$ とすると

$$\begin{aligned} f(\pi) = \cos \pi z &= \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{z \sin \pi z}{\pi(z^2 - n^2)} \\ \Leftrightarrow \qquad \pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1} \frac{2z}{z^2 - n^2} \end{aligned}$$

(ii) $f(x)$ において、$x = 0,\ a = z$ とすると

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &= \frac{\sin \pi z}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{z \sin \pi z}{\pi(z^2 - n^2)}(-1)^n \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\pi z}{\sin \pi z} &= 1 + 2z \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} \end{aligned}$$

Q3

$f(x) = \dfrac{1}{1-2a\cos x + a^2}, \qquad |a| < 1$ を $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開せよ

解

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{-inx}}{1-2a\cos x + a^2}$$

ここで $e^{-ix} = z$ とおくと積分路は C_r : 単位円 (時計回り) $\to C$(反時計回り) $= -C_r$ となり

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{idz}{z}\frac{z^n}{1-a(z+z^{-1})+a^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_C dz - \frac{iz^n}{a(z-a)(z-1/a)} \\ &= -2\pi i\frac{1}{2\pi}\mathrm{Res}\left[-\frac{iz^n}{a(z-a)(z-1/a)}\right]\Bigg|_{z=a} \\ &= \frac{a^n}{1-a^2} \end{aligned}$$

よって、 $f(x) = \dfrac{1}{1-2a\cos x + a^2}$ のフーリエ級数展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a^n}{1-a^2}e^{in\pi} \\ &= \frac{1}{1-a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a^n}{1-a^2}\cos nx \end{aligned}$$

と求まる

第10回

Q1

$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ で $\boldsymbol{e}_r$(r 方向単位ベクトル), $\boldsymbol{e}_\theta$(θ方向単位ベクトル), $\boldsymbol{e}_\phi$(ϕ方向単位ベクトル), $|\boldsymbol{e}_\alpha| = 1$ として $\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_i(\boldsymbol{e}_\alpha)_j = \delta_{ij}$ を示せ

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\phi &= -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

と求まる。よって

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x(\boldsymbol{e}_\alpha)_x &= \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y(\boldsymbol{e}_\alpha)_y &= \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\phi \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z(\boldsymbol{e}_\alpha)_z &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
&= 1 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x(\boldsymbol{e}_\alpha)_y = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y(\boldsymbol{e}_\alpha)_x &= \sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos\phi \\
&= 0 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_y(\boldsymbol{e}_\alpha)_z = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z(\boldsymbol{e}_\alpha)_y &= \sin\theta\cos\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\theta\sin\phi + 0 \\
&= 0 \\
\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_z(\boldsymbol{e}_\alpha)_x = \sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_x(\boldsymbol{e}_\alpha)_z &= \sin\theta\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\theta\cos\phi + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

以上より

$$\sum_\alpha (\boldsymbol{e}_\alpha)_i(\boldsymbol{e}_\alpha)_j = \delta_{ij}$$

となる

Q2

関数列 $\{\varphi_i(x)\} \qquad x \in [a,b]$ が

(i) 規格直交列をなすとは何か

(ii) 完全であるとは何か

(iii) 規格直交列、完全性が成立する時、パーセバルの関係式について証明せよ

(iv) 任意の $f(x),\ x \in [0,1]$ に対して、$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{2} c_n \sin 2\pi n x$ として $r = ||f - \tilde{f}||$ を最小にする c_n を求めよ

解

(i) 内積

$$(\varphi_n, \varphi_m) \equiv \int_a^b dx \varphi_n^*(x)\varphi_m(x) = \delta_{nm}$$

を満たすとき $\{\varphi_i(x)\}$ を**規格直交列**という

(ii) 任意の関数 $f(x)$ が規格直交列 $\{\varphi_i(x)\}$ により

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \varphi_n(x)(\varphi_n(x), f) \\ &= \int_a^b dx' \left(\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x') \right) f(x') \end{aligned}$$

と展開されるとき $\{\varphi_i(x)\}$ は**完全**であるという。いいかえれば

$$\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x') = \delta(x - x')$$

が $\{\varphi_i(x)\}$ の完全性の必要十分条件である

(iii) 関数 $f(x)$ が完全系 $\{\varphi_i(x)\}$ で $f = \sum_n \varphi_n(\varphi_n, f)$ と展開されているとすれば

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(f - \sum_n \varphi_n(\varphi_n, f), f - \varphi_n(\varphi_n, f)\right) \\
&= (f,f) - \sum_n \left((\varphi_n, f)^*(\varphi_n, f) + (\varphi_n, f)(f, \varphi_n)\right) + \sum_{nm}(\varphi_n, f)^*(\varphi_n, f)(\varphi_n, \varphi_m) \\
&= (f,f) - \sum_n |c_n|^2, \quad c_n = (\varphi_n, f)
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
||f||^2 &= \sum_n |c_n|^2 \\
\Leftrightarrow \qquad \int_a^b dx|f(x)|^2 &= \sum_n |c_n|^2
\end{aligned}
$$

これはパーセバルの関係式となる

またベッセル不等式

$$
\sum_n |c_n|^2 \le ||f(x)||^2
$$

における等号成立のとき ($\{\varphi_i\}$ が完全系のとき) がパーセバルの関係式であることも理解できる

(iv)

$$
\begin{aligned}
r^2 &= ||f - \sum_n c_n \sin 2\pi nx||^2 \\
&= (f,f) - \sum_{n=1}^{2}\{c_n(f, \sin 2\pi nx) + c_n^*(\sin 2\pi nx, f)\} + \sum_{n,m=1}^{2} c_n^* c_m(\sin 2\pi nx, \sin 2\pi mx)
\end{aligned}
$$

よって、r^2 を最小にするには

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r^2}{\partial c_1^*} &= -(\sin 2\pi x, f) + c_1(\sin 2\pi x, \sin 2\pi x) + c_2(\sin 2\pi x, \sin 4\pi x) = 0 \\
\frac{\partial r^2}{\partial c_2^*} &= -(\sin 4\pi x, f) + c_1(\sin 4\pi x, \sin 2\pi x) + c_2(\sin 4\pi x, \sin 4\pi x) = 0
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
(\sin 2\pi x, \sin 2\pi x) = (\sin 4\pi x, \sin 4\pi x) &= \int_0^1 dx \sin^2 2\pi x = \frac{1}{2} \\
(\sin 2\pi x, \sin 4\pi x) = (\sin 4\pi x, \sin 2\pi x) &= \int_0^1 dx \sin 2\pi x \sin 4\pi x = 0
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 2(\sin 2\pi x, f) = 2\int_0^1 dx \sin 2\pi x f(x) \\
c_2 &= 2(\sin 4\pi x, f) = 2\int_0^1 dx \sin 4\pi x f(x)
\end{aligned}
$$

と求まり、c_n をこのようにとるのが最も精度が高くなる。

補足　　ベッセル不等式

$$
\begin{aligned}
r^2 &= ||f - \sum_n c_n \varphi_n||^2 \\
&= (f, f) - \sum_n \{c_n(f, \varphi_n) + c_n^*(\varphi_n, f)\} + \sum_{n,m} c_n^* c_m (\varphi_n, \varphi_m) \\
&= (f, f) - \sum_n \{c_n(f, \varphi_n) + c_n^*(\varphi_n, f)\} + \sum_n c_n^* c_n \qquad \text{(規格直交関数列)}
\end{aligned}
$$

よって、r^2 を最小にするには

$$
\frac{\partial r^2}{\partial c_n^*} = -(\varphi_n, f) + c_n = 0
$$

よって

$$
c_n = (\varphi_n, f) = \int_a^b dx \varphi_n^*(x) f(x)
$$

ととるのが最も精度が高い。この c_n を代入して

$$
\sum_n |(\varphi_n, f)|^2 \leq (f, f)
$$

これをベッセル不等式という

第11回

Q1

(i) $\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0$ の一般解を求めよ

(ii) $\ddot{G}^{\pm}(t) + \omega_{\pm}^2 G^{\pm}(t) = \delta(t)$ をフーリエ変換により求めよ.
ただし、$\omega_{\pm} = \omega \pm i0$ とする

(iii) $G^0 = G^+ - G^-$ として、G^0 は斉次方程式

$$\ddot{G}^0 + \omega^2 G^0 = 0$$

をみたすことを確認せよ

(iv) G^+ を用いて

$$\ddot{x} + \omega^2 x = Fe^{i\omega_0 t}, \qquad \omega \neq \omega_0$$

の一般解を求めよ

(v) 同様に

$$\ddot{x} + \omega^2 x = Fe^{i\omega t}$$

の一般解を求めよ

解

(i) $x_0 = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t} \qquad (A, B$ は積分定数)

(ii) 式をフーリエ変換で考えると $G^{\pm}(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikt} \tilde{G}^{\pm}(k)$
また $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}$ と書けるので

$$\begin{aligned} & -k^2 \tilde{G}^{\pm}(k) + \omega_{\pm}^2 \tilde{G}^{\pm}(k) = 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & \tilde{G}^{\pm}(k) = \frac{1}{\omega_{\pm}^2 - k^2} \end{aligned}$$

これを逆フーリエ変換すると

$$G^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikt}\frac{1}{\omega_{\pm}^2 - k^2}$$

ここで、積分経路を $G^+(G^-)$ のときは上 (下) 半面の半円をとると留数定理、ジョルダンの補題より

$$G^{\pm}(t) = \mp i\frac{e^{\pm i\omega_{\pm}|t|}}{2\omega_{\pm}}$$

と求まる

(iii)

$$\begin{aligned}
\ddot{G}^0 &= \ddot{G}^+ - \ddot{G}^- \\
&= i\frac{\omega}{2}e^{i\omega|t|} - i\frac{\omega}{2}e^{-i\omega|t|} \\
&= -\omega^2\left(-i\frac{1}{2\omega}e^{i\omega|t|} + i\frac{1}{2\omega}e^{-i\omega|t|}\right) \\
&= -\omega^2(G^+ - G^-) \\
&= -\omega^2 G^0
\end{aligned}$$

なので

$$\ddot{G}^0 + \omega^2 G^0 = 0$$

となる

(iv) $\omega_+ = \omega + i\varepsilon$ とする

G^+ を用いて特解 x_s は

$$x_s = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' G^+(t-t')Fe^{i\omega_0 t'}$$

と書ける

ここで

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dt' G^+(t-t')Fe^{i\omega_0 t'} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{iF}{2\omega_+}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{(i\omega-\varepsilon)|t-t'|}e^{i\omega_0 t'} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{iF}{2\omega_+}\left(\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i\omega t - \varepsilon t}e^{i(\omega_0-\omega)t' + \varepsilon t'}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \int_t^\infty dt' e^{-i\omega t+\varepsilon t} e^{i(\omega_0+\omega)t'-\varepsilon t'} \Bigg) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{iF}{2\omega_+} \left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{i(\omega_0-\omega)+\varepsilon} - \frac{e^{i\omega_0 t}}{i(\omega_0+\omega)-\varepsilon} \right) \\
&= -\frac{iF}{2\omega} \left(\frac{e^{i\omega_0 t}}{i(\omega_0-\omega)} - \frac{e^{i\omega_0 t}}{i(\omega_0+\omega)} \right) \\
&= \frac{F}{\omega^2-\omega_0^2} e^{i\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

よって、解は

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x_s \\
&= Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t} + \frac{F}{\omega^2-\omega_0^2} e^{i\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

と求まる

(v) $\omega_+ = \omega + i\varepsilon$ とする

G^+ を用いて特解 x_s は

$$
x_s = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^\infty dt' G^+(t-t') F e^{i\omega t'}
$$

と書ける

ここで

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^\infty dt' G^+(t-t') F e^{i\omega t'} &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{iF}{2\omega_+} \int_{-\infty}^\infty dt' e^{(i\omega-\varepsilon)|t-t'|} e^{i\omega t'} \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{iF}{2\omega_+} \Bigg(\int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega t-\varepsilon t} e^{\varepsilon t'} \\
&\qquad\qquad + \int_t^\infty dt' e^{-i\omega t+\varepsilon t} e^{2i\omega t'-\varepsilon t'} \Bigg) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{iF}{2\omega_+} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} + t \right] e^{i\omega t-\varepsilon t} - \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega-\varepsilon} \right) \\
&\quad (\text{ここで} \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} + t \text{ とした}) \\
&= -\frac{iF}{2\omega} t e^{i\omega t} + \left(\frac{F}{4\omega^2} - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{i\omega t} \\
&\equiv \tilde{x}_s + + \left(\frac{F}{4\omega^2} - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{i\omega t} (\text{斉次解})
\end{aligned}
$$

よって、解は

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \tilde{x}_s \\ &= Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t} - \frac{iF}{2\omega} t e^{i\omega t} \end{aligned}$$

と求まる

Q2

$x(1-x) = \sum_n c_n \sin n\pi x,\ 0 \leq x \leq 1$ において c_n を求めよ

解

フーリエ級数展開において、$\sin n\pi x$ のみで展開されるには奇関数でなければならない。したがって $x(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$ を $-1 \leq x \leq 1$ における奇関数に拡張してみると

$$x(1-x) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ x(1+x) & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

と書ける。これより、フーリエ展開すると

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} dx f(x) \sin n\pi x &= \int_0^1 dx x(1-x) \sin n\pi x + \int_{-1}^{0} dx x(1+x) \sin n\pi x \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \\ \int_{-1}^{1} dx f(x) \cos n\pi x &= 0 \qquad (f(x) \text{ は奇関数}) \end{aligned}$$

となる. よって

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

と求まり、

$$x(1-x) = \sum_{n=1} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x \qquad 0 \leq x \leq 1$$

となる