第 II 部
ベクトル解析

5　基本的な記号と公式

5.1　基本的な記号

- 基本ベクトル

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 内積

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (\text{クロネッカーのデルタ}) \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sum_i A_i B_i = A_i B_i \quad (\text{Einstein の規約}) \end{aligned}$$

- 外積

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= \epsilon_{ijk}\vec{e}_k \\ \epsilon_{ijk} &= \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3) \ \ (\text{及び周期的置換}) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1) \ \ (\text{及び周期的置換}) \\ 0 & \quad i = j, \ \text{or} \ , j = k, \ \text{or} \ , k = i \end{cases} \quad (\text{エディングトンのエプシロン}) \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} \ : \ \text{完全反対称} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ccccccc} A_1 & z & A_2 & x & A_3 & y & A_1 \\ & \times & & \times & & \times & \\ B_1 & & B_2 & & B_3 & & B_1 \end{array} \\ (\vec{A} \times \vec{B})_i &= \epsilon_{ijk} A_j B_k \end{aligned}$$

- スカラー三重積

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \ \ (\text{平行六面体の体積})$$

- gradient(勾配)
  スカラー（関数）場 $\phi(\vec{r})$ に対してベクトル場を次のように与える。

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}, \ \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \\ (\text{grad } \phi)_i &= (\vec{\nabla}\phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \partial_i \phi \end{aligned}$$

- divergence(発散)
  ベクトル場 $\vec{A}(\vec{r})$ に対してスカラー場を次のように与える。

$$\mathrm{div}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial x^i} = \partial_i A_i$$

- rotation(回転)
  ベクトル場 $\vec{A}(\vec{r})$ に対してベクトル場 を次のように与える。

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \vec{A} &= \mathrm{curl}\ \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} == \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_z \end{pmatrix} \\ (\mathrm{rot}\ \vec{A})_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j A_k\end{aligned}$$

- ラプラシアン
  スカラー場 $\phi(\vec{r})$ に対してスカラー場を次のように与える。

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \partial_i\partial_i\phi$$

5.2 公式

- rot grad $\phi = \vec{0}$ 勾配は回転なし
- div rot $\vec{A} = 0$　回転は発散なし
- エディングトンのエプシロンについて

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} &= 2\delta_{kl} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= 6\end{aligned}$$

- grad $fg = f$ grad $g + g$ grad f
- div $\psi\vec{A} =$ grad $\psi\cdot\vec{A} + \psi$ div $\vec{A}$
- rot $\psi\vec{A} =$ grad $\psi\times\vec{A} + \psi$ rot $\vec{A}$
- $\Delta fg = f\Delta g + g\Delta f + 2$ grad $f\cdot$ grad g
- ベクトル三重積

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

6　積分定理

6.1　線積分

曲線 C $(x,y,z) = (x(t), y(t), z(t))$　$t \in [a,b]$、任意のスカラー場 X, Y, Z ベクトル場 $\vec{A} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ に対して線積分を

$$\begin{aligned}
\int_C dxX(x,y,z) &= \int_a^b dt\frac{dx}{dt}X(x(t),y(t),z(t)) \\
\int_C dyY(x,y,z) &= \int_a^b dt\frac{dy}{dt}Y(x(t),y(t),z(t)) \\
\int_C dzZ(x,y,z) &= \int_a^b dt\frac{dz}{dt}Z(x(t),y(t),z(t)) \\
\int_C d\vec{r}\cdot\vec{A} &= \int_C Xdx + Ydy + Zdz
\end{aligned}$$

と定義する。

・例

$$\int_C d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = \phi(b) - \phi(a), \qquad \oint d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0$$

6.2　面積分

曲面 S $(x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$　$(u,v) \in S'$ に対して 曲面上 $\vec{r}$ における 2 つの接線ベクトル　$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du$、$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv$ のつくる平行四辺形の面積をその長さとする無限小の法線ベクトルを面積要素 $d\vec{S}$ とする。

$$d\vec{S} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dudv = \vec{n}dS$$

($\vec{n}$ は単位法線ベクトル) これを用いて任意のベクトル場 $\vec{B}$ の曲面 S 上での面積分を以下のように定義する。

$$\int\int_S d\vec{S}\cdot\vec{B} = \int\int_{S'} dudv\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\vec{B}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

・例

$$\int\int_S |d\vec{S}| = \int\int_S dS = \int\int_{S'} dudv\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| \quad \text{(曲面の面積)}$$

6.3　積分定理

- 2 次元 Gauss の定理

$$\int\int_D dxdy\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=\oint_{\partial D} Xdx+Ydy$$

- 3 次元 Gauss の定理

$$\int\int\int_V dV\ \mathrm{div}\ \vec{A}=\int\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{A}$$

$(dV=dxdydz)$

- Stokes の定理

$$\int\int_S d\vec{S}\cdot\ \mathrm{rot}\ \vec{A}=\oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{A}$$

- Green の公式

1

$$\int\int\int_V dV\left(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v+u\Delta v\right)=\int\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot u\vec{\nabla}v$$

2

$$\int\int\int_V dV\left(u\Delta v-v\Delta u\right)=\int\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u)=\int\int_{\partial V} dS\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

($\vec{n}$は法線方向)・方向微分係数

単位ベクトル $\hat{A}$ 方向の方向微係数 $\frac{\partial\phi}{\partial A}$ を

$$\frac{\partial}{\partial A}\phi(\vec{r})=\lim_{\lambda\to 0}\left[\phi(\vec{r}+\lambda\hat{A})-\phi(\vec{r})\right]=\hat{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

と定義する。

7　直交曲線座標系

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(u^1, u^2, u^3) \\ x^2(u^1, u^2, u^3) \\ x^3(u^1, u^2, u^3) \end{pmatrix}$$

と x^1, x^2, x^3 (x, y, z) の代わりに u^1, u^2, u^3 で座標 $\vec{r}$ をあらわす。

- 基本ベクトル

$$h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right|, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = h_i \vec{e}_i, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

（となるように u^1, u^2, u^3 をならべる。）

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^i dx^i = \sum_i h_i^2 (du^i)^2, \quad dxdydz = h_1 h_2 h_3 du^1 du^2 du^3$$

- gradient　$\phi(u^1, u^2, u^3)$

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u^1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u^2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u^3}\vec{e}_3$$

- divergence　$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2 A_3 \vec{e}_3$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial u^1} + \frac{\partial (A_2 h_3 h_1)}{\partial u^2} + \frac{\partial (A_3 h_1 h_2)}{\partial u^3}\right\}$$

- Laplacian

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u^3}\right)\right\}$$

- rotation

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\vec{e}_1 & \frac{1}{h_3 h_1}\vec{e}_2 & \frac{1}{h_1 h_2}\vec{e}_3 \\ \partial_{u^1} & \partial_{u^2} & \partial_{u^3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{pmatrix}$$

1. 3次元極座標

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta,\\
&\quad h_r = 1,\quad h_\theta = r,\quad h_\psi = r\sin\theta,\quad dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\psi\\
\mathrm{grad}\ \phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\vec{e}_\psi\\
\mathrm{div}\ \vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial A_r r^2}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta\sin\theta}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi},\quad (\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\psi\vec{e}_\psi)\\
\mathrm{rot}\ \vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(A_\psi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\psi}\right\}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\psi} - \frac{\partial(A_\psi r)}{\partial r}\right\}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\vec{e}_\psi\\
\Delta\phi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2\psi}
\end{aligned}
$$

2. 円筒座標

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\psi,\ y = r\sin\psi,\ z = z,\quad h_r = 1,\ h_\psi = r,\ h_z = 1,\quad dxdydz = rdrd\psi dz\\
\mathrm{grad}\ \phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\vec{e}_\psi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z\\
\mathrm{div}\ \vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial(A_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\psi}{\partial\psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},\quad (\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\psi\vec{e}_\psi + A_z\vec{e}_z)\\
\mathrm{rot}\ \vec{A} &= \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial(A_z)}{\partial\psi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right\}\vec{e}_r + \left\{\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right\}\vec{e}_\psi + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(A_\theta r)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\psi}\right\}\vec{e}_z\\
\Delta\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\psi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial^2 z}
\end{aligned}
$$

3. 2次元極座標

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\psi,\quad y = r\sin\psi,\qquad dxdy = rdrd\psi\\
\mathrm{grad}\ \phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\psi}\vec{e}_\psi\\
\Delta\phi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\psi}
\end{aligned}
$$