解説

シリンダー及びトーラス上の分数量子統計：くみひも群およびゲージ不変性

初貝安弘 〈東京大学物性研究所 106 東京都港区六本木 7-22-1〉
甲元眞人 〈東京大学物性研究所 106 東京都港区六本木 7-22-1〉
Yong-Shi Wu 〈Department of Physics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA〉

分数統計を支配しているくみひも群 (braid group) を考察することにより，特に自明でない位相的構造を持った曲面上における分数統計粒子系の構造を解説する．くみひも群の生成子の満たす関係式を分数統計粒子の量子力学的な性質との関係で議論する．その結果，分数統計粒子系の統計にある制限がつき，また曲面の穴を貫く磁束に起因するアハラノフ・ボーム効果にある特徴があらわれる．分数統計の系の基本的な構造を考察することにより，分数量子ホール効果における準粒子に対するミクロな理論のいくつかの結論と分数統計粒子の位相的構造を反映するくみひも群による考察とが無矛盾であることがわかる．またくみひも群の表現論からの要請を満たすように分数統計粒子系を格子上で構成し格子上での具体的な数値計算の結果を示す．

I. 序

量子力学を多粒子系に応用する際，古典力学には存在しなかった粒子系の「統計性」が問題となる．統計力学の教科書にあるように通常フェルミ統計とボーズ統計の 2 種類の統計性が考えられる．ボーズ統計に従う粒子の波動関数は 2 粒子を入れ換えた時，$1=e^{i0}$ の因子がかかり（つまり何も変化しない），フェルミ統計に従う粒子の波動関数は 2 粒子を入れ換えた時，$-1=e^{i\pi}$ の因子がかかるのである．単純に考えて 2 粒子を入れ換えた時 e^{i0} と $e^{i\pi}$ の間の中間の因子 $e^{i\theta}$ が波動関数にかかるような粒子系は考えることができないのであろうか？

この問題に対する答えは 2 次元以外の系においては否定的であり，フェルミ，ボーズ統計以外の統計は許されないのであるが，実は 2 次元系においてのみその存在が理論的には許される．そのような統計は分数統計と呼ばれ，分数統計に従う粒子系はフェルミ，ボーズ統計に限られないという意味をこめてエニオン (anyon) 系といわれる．[1,2]

電子，陽子，^{3}He などはフェルミ粒子であり，光子，^{4}He などはボーズ粒子であるがエニオン系は現実に存在するのであろうか？ 不思議なことに（理論的には喜ばしいことに）そのようなエニオン系は存在することが信じられている．強磁場下における 2 次元電子系の一つの相である，分数量子ホール効果を示す状態においては，準粒子は分数統計を持つと考えられている．系を特徴付ける最低ランダウ準位の占有率が $1/m$ の時，系の準粒子の波動関数は 2 個の準粒子を入れ換えた時，$e^{i\pi/m}$ の因子がかかるのである．強磁性体における準粒子であるスピン波が物理的存在であるというのと同じような意味で，分数量子ホール効果においては，エニオンが準粒子として存在するのである．[3~7]

ここでエニオン，分数統計粒子系の性質を少し考えてみよう．ボーズ粒子系はボーズ凝縮し，フェルミ粒子系はパウリの原理によりお互いに避け合い，無限小の引力でクーパー不安定性によって超伝導状態に転移する．それではエニオンはどのような性質を持つのであろうか？

このような問題提起が高温超伝導の理論の一つの可能性としてラフリン等によりなされ，[8,9] 荷電セミオン系（2 粒子を入れ換えた時 $i=e^{i\pi/2}$ の因子がかかる）においてはその自由粒子系の基底状態が，超伝導状態であることがほぼ信じられるに至った．しかし酸化物超伝導物質においてはエニオンの存在は実証されておらず，むしろ大勢はその存在に対して否定的であるのが現状である．

以下エニオン系をその基礎から振り返ってみよう．良く知られているようにフェルミ統計およびボーズ統計において基本的な役割を果たしているのが置換群であるが，分数統計粒子系において同時に基本的なものがくみひも群である．くみひも群 $B_N(S)$ は曲面 S 上での N 粒子系の配位空

間の第1ホモトピー群として定義される.[10] 我々は特に系 Sに穴がある時,これに伴う新しいくみひも群の生成子が付加されることに注目する.それはその穴を通る磁束に対するアハラノフ・ボーム効果と関連している.エネルギースペクトルの磁束に対する対称性,系のゲージ不変性がくみひも群の1次元表現の解析から得られる.分数統計粒子やくみひも群を位相的に非自明な曲面上で考えることは物理的にどんな意味があるのかをここで振り返って見よう.ひとつにはラフリン[11]とハルペリン[12]による量子ホール効果におけるゲージ不変性の議論及びその分数量子ホール効果に対する拡張[13]を考える場合,分数統計粒子の超伝導におけるフラックスの量子化条件を考える場合,[14] 分数統計粒子系をシリンダーまたは円環,トーラス上で考えることが必要になる.また分数統計粒子系を有限の系でシミュレートする際,周期的境界条件を課すと系は必然的にシリンダーもしくはトーラスとなる.更に $B_N(S)$ は曲面 Sのグローバルな構造に依存するから分数統計粒子をその上で考えた際,その基底状態にもその位相的構造が反映する.最近 Wen[15] によりトポロジカルオーダーとして提案されている新しいクラスの秩序状態は,系の位相的構造に依存するような基底状態の縮退度を持ち,今までにトポロジカルオーダーがあるとして議論されている分数量子ホール系やカイラルスピン状態[16]においてはそこでの励起が分数統計を持っている.一方で分数統計粒子は,現実物質においては準粒子としてあらわれるのであり,基本的な構成粒子というわけではない.その結果くみひも群によるその分数統計準粒子系の解析は多体系の基底状態,ダイナミックスにある種の制限を与えることになる.

なお日本語での分数統計粒子系の解説は青木,[17] 北沢[18] らによるものがあるので,それらも参照されたい.

II. 多粒子系の時間発展とくみひも群

くみひも群がどうして2次元系の量子力学に関連しているのかを考えてみる.そのため基本的な事からなるべく自己完結的になるようにまとめてみる.まず $\Psi(q,\ t)$ を時間 tにおける qでの波動関数としてその時間発展は次の式で与えられる.

$$\Psi(q',\ t')=\int_C \mathrm{d}\,q K(q',\ t';\ q,\ t)\Psi(q,\ t) \quad (\text{for } t'\geq t), \tag{2.1}$$

ここで qは多粒子系の配位空間 Cの座標であり,Cは一般に単連結ではない.Kは一般に径路積分でかけるが,Cの中の径路のなかで連続に変形可能でないものについては一般に異なる重みで寄与することも可能である.そこで Kの表式として $\pi_1(C)$ を Cの基本群として Feynman の公式よりやや複雑に

$$K(q't';\ qt)=\sum_{\alpha\in\pi_1(C)}\chi(\alpha)\int_{\text{path}\in\alpha} D\{q\}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'} L_{\mathrm{cl}}(t)\right] \tag{2.2}$$

と書ける.[10] ここで L_{cl} は古典的なラグランジアン密度で,$\chi(\alpha)$ についてはユニタリティーと完全性から

$$\chi^{\dagger}(\alpha)\chi(\alpha)=1, \tag{2.3}$$

$$\chi(\alpha)\chi(\beta)=\chi(\alpha\cdot\beta) \tag{2.4}$$

が要求される.そのため $\Psi(q,\ t)$ が M成分を持つとすると χ も対応して $M\times M$ 行列となり,(2.3),(2.4) より χ は $\pi_1(C_N)$ の M次元表現になっている.そこで古典的ラグランジアン密度 L_{cl} が与えられているとき,(非)同値な表現 $\chi^{(1)}(\alpha)$,$\chi^{(2)}(\alpha)$ は(非)同等な量子力学的系を与えることになる.このことが分数統計粒子を考える際本質的に重要である.

系が曲面 Sの上での Nコのスピンの無い同種粒子系であるとすると,その配位空間 C_N は

$$C_N=\{S\times\cdots\times S-D\}/P_N, \tag{2.5}$$

$$D=\{x_1,\ x_2,\cdots x_N)|\ ^{\exists} i\neq j,\ x_i=x_j\} \tag{2.6}$$

で与えられる.(2.5) で最初の Nコの Sの積は Nコの粒子の曲面 Sでの座標を表し,Dはハードコア条件を意味する.P_N は N次の置換群であり,同種粒子を考えているため P_N で割る.曲面 S上での N次のくみひも群 $B_N(S)$ は C_N の基本群で $B_N(S)\equiv\pi_1(C_N)=\pi_1((\otimes^N S-D)/P_N)$ と定義される.数学的には $B_N(S)$ のような群はいくつかの生成子とその間の関係式 (defining relations) を与えることで定まる.次に具体的な例をみていこう.

1. 平面及びディスク上でのくみひも群

生成子は i 番目と $i+1$ 番目の粒子の反時計まわりのいれかえを表す $\theta_i(i=1,2,\cdots,\ N-1)$ で与えられ,その間の関係式は

$$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i \quad \text{for } |i-j|\geq 2, \tag{2.7a}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}. \tag{2.7b}$$

ここで一般に $\sigma_i^{-1}\neq\sigma_i$ であることを注意したい.もし $\sigma_i^2=1$ とすれば (2.7a, b) は N次の置換群 P_N を定義することになる.さらに (2.7b) は有名な Yang–Baxter 関係式の特殊な場合になる.$B_N(R^2)$ の表現は (2.7a, b) をみたす行列 $\chi(\sigma_j)$ であるが,特に1次元ユニタリ表現の場合 (2.7b) より $\chi(\sigma_i)=\chi(\sigma_{i+1})$ であり,すべての i に対して

$$\chi(\sigma_i)=e^{i\theta} \tag{2.8}$$

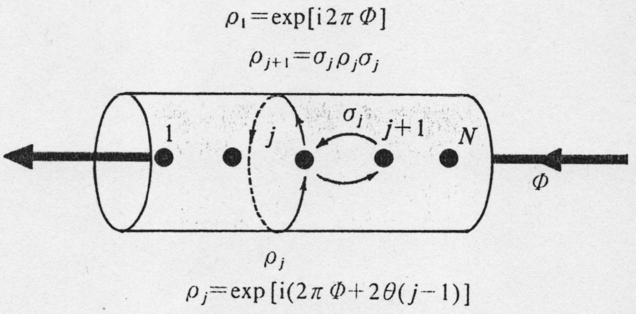

図1　シリンダー上のくみひも群の生成子.

となる．物理的にはこの $e^{i\theta}$ が統計による位相であり，[10] $\theta=0$ の場合ボーズ統計，$\theta=\pi$ の場合フェルミ統計であり，$\theta=\pi/2$ の場合が高温超伝導との関連が議論されているセミオンの統計に対応する．[8, 9] 一般の θ の場合の量子統計を θ（スカラー）分数統計と呼ぶ（球面上のくみひも群[19]）.

2.　シリンダー及び円環上のくみひも群

円環は位相的にはシリンダーと同等であり，これらの系は単連結ではなく1点に縮めることができないループを1種類持つ．その結果この系のくみひも群の生成子は上述の局所的ないれかえ σ_j の他に左側に $j-1$ コの粒子を見ながら系の穴をまわるループに対応する生成子 ρ_j がある．これらの間の定義関係式は (2.7a, b) の他に次のようなものがある[20]（図1）.

$$\rho_j\rho_i = \rho_j\rho_i, \tag{2.9a}$$

$$\rho_j\sigma_i = \sigma_i\rho_j \quad (\text{for } j \neq i,\ j \neq i-1), \tag{2.9b}$$

$$\rho_{i+1} = \sigma_i\rho_i\sigma_i. \tag{2.9c}$$

(2.9a, b) は関与する粒子が異なればそれらの生成子は可換であることを示している．(2.9c) は重要であり局所的ないれかえ σ と非局所的な移動 ρ とが互いに関連していることを示している．これにより分数統計粒子系においてはアハラノフ・ボーム効果がその統計性に依存するというきわめて特徴的な効果を及ぼす．

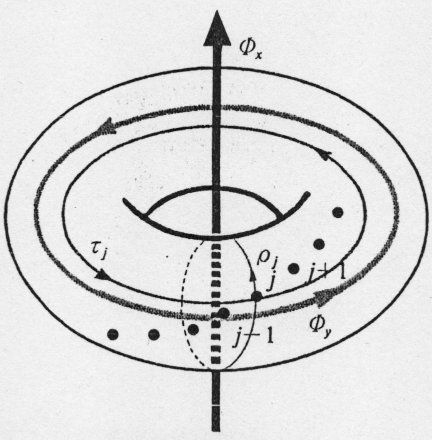

図2　トーラス上のくみひも群の生成子.

3.　トーラス上でのくみひも群[21～23]

トーラス上においては1点に縮めることができないループが2種類あり，それに対応してくみひも群は局所的ないれかえ $\sigma_i (1 \leq i \leq N-1)$ の他に上述の2種類のループをまわる ρ_i, $\tau_i (i=1,\cdots, N)$ がある．定義関係式は (2.7)(2.9) 等を含んだ複雑なものとなるが新しく重要なものとして次の二つがある（図2）.

$$\tau_{i+1}^{-1}\rho_i\tau_{i+1}\rho_i^{-1} = \sigma_i^{-2}, \tag{2.10a}$$

$$\rho_1^{-1}\tau_1^{-1}\rho_1\tau_1 = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{N-2}\sigma_{N-1}^2\sigma_{N-2}\cdots\sigma_2\sigma_1. \tag{2.10b}$$

これらによって分数統計粒子系の統計，電荷，ゲージ不変性に重要な効果がもたらされる．

以下上述のくみひも群のユニタリ表現を考えた時どのような制限が現れるかを考え，その物理的帰結をいくつかの具体的な場合について考える．

III.　量子統計に関する制限

ここではくみひも群 $B_N(S)$ のユニタリ表現を考えることにする．その際，局所的な粒子のいれかえ σ_i に対応する表現（行列）$\chi(\sigma_i)$ が統計性を定めることになる．

1.　平面及びディスク上の分数統計粒子

1次元の表現に関してはすべての σ_i は同じ一つの位相因子

$$\chi(\sigma_i) = e^{i\theta} \tag{3.1}$$

で表される．これが最もよく使われる（スカラー）分数統計に対応する．

2.　円環及びシリンダー上の分数統計粒子

1次元のユニタリ表現は θ, Φ という二つのパラメターで次のように書ける．

$$\chi(\sigma_i) = e^{i\theta}, \quad \chi(\rho_i) = \exp[i\{2\pi\Phi + 2\theta(i-1)\}]. \tag{3.2}$$

ここで初めてあらわれた Φ は系の穴を貫く磁束 ϕ をあらわす．具体的には

$$\Phi = \frac{\phi}{\phi_0^*}, \quad \phi_0^* = \frac{hc}{e^*}, \tag{3.3}$$

ここで e^* は分数統計粒子の電荷である．注意すべきことは θ と Φ は $\chi(\rho_i)$ の表式を通じて関係していることであり，例えば粒子が穴を回るときに受けるアハラノフ・ボーム位相は穴に通る磁束だけでなく系の統計性にも依存することになる．そのため格子上で分数統計粒子を考えた際，周期的境界条件を課すときは十分に注意する必要がある．[20, 24, 25] 円環を考える時には $\chi(\rho_i)$ の表現で十分である．つまり穴に最も近いループに対応する $\chi(\rho_1)$ は $\exp(i2\pi\Phi)$ で与えられる．ところが系がシリンダーのときは二つのエッジは

同等であるから，$\chi(\rho_1)$ と $\chi(\rho_N)$ はともに $\exp(\mathrm{i}2\pi\Phi)$ で与えられる．よって (3.2) より

$$\exp\{\mathrm{i}2\theta(N-1)\}=1 \tag{3.4}$$

となる．[20]

3. トーラス上の分数統計粒子系

もしトーラス上でも 1 次元表現と考えるなら (2.10) より $e^{\mathrm{i}2\theta}=1$ となる．そのため許される θ は 0 または π でありボーズ統計とフェルミ統計しか許されず，分数統計は許されないことになる．一方で分数量子ホール効果においては分数統計粒子 ($\theta\neq 0,\pi$) が実現していると考えられるが，上述の視点に立ってトーラス上で分数量子ホール効果を考えるならば，くみひも群の表現として高次元表現を，すなわち波動関数としては多成分の波動関数を考えなければいけないことがわかる．[22, 23, 26] 以下 M 次元表現を考える．スカラー統計

$$\chi(\sigma_i)=e^{\mathrm{i}\theta}I_{\mathrm{M}} \tag{3.5}$$

の場合，(2.9c) (2.10a) より

$$\chi(\tau_{i+1})=e^{-\mathrm{i}2\theta}\chi(\tau_i),\quad \chi(\rho_{i+1})=e^{\mathrm{i}2\theta}\chi(\rho_i), \tag{3.6}$$

$$\chi(\tau_i)\chi(\rho_k)=\chi(\rho_k)\chi(\tau_i)e^{\mathrm{i}2\theta} \tag{3.7}$$

が得られる． ここで $\chi(\rho_i)$ が対角的な基底をとれば η を任意の整数として

$$\tau(\rho_i)=\exp\{\mathrm{i}2\pi\Phi_y-\mathrm{i}2\theta(i-1)\}\,\mathrm{diag}(\exp\{\mathrm{i}2\theta(\eta+1)\},\ \exp\{\mathrm{i}2\theta(\eta+2)\},\cdots,\exp\{\mathrm{i}2\theta(\eta+M)\}), \tag{3.8a}$$

$$\chi(\tau_i)=\exp\{\mathrm{i}2\pi\Phi_x+\mathrm{i}2\theta(i-1)\}\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\vdots\\\vdots&\vdots&0&\ddots&0\\0&0&&\ddots&1\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix} \tag{3.8b}$$

となる．さらに (3.7)(2.10b) により表現の次元 M と粒子数 N に関して

$$\exp(\mathrm{i}2\theta M)=1,\quad \exp(\mathrm{i}2\theta N)=1 \tag{3.9}$$

の制限が課される．

(3.8a) で i を $i+1$ にかえると $\exp(\mathrm{i}2\theta M)$ の位相がでるから $\exp(\mathrm{i}2\theta M)=1$ の条件は $\chi(\tau_i)$ と $\chi(\tau_{i+1})$ がユニタリ同値であることを示す．これはトーラスには端がないのであるから当然である．また (3.7) 式はトーラス上での x, y 両方向のループにそった平行移動は磁気的並進操作と同じように非可換であることを示している．表現の次元に関しては $\theta=\pi p/q$ とすれば既約表現に関しては $M=q$ となる．

IV. シリンダー及びトーラス上での分数統計粒子系の構成

分数統計粒子系を格子上で構成することを考えよう．これにより分数統計粒子系を計算機によってシミュレートすることが可能となる．一方向に周期的境界条件をおけば系はシリンダーに，[20, 24, 25] 2 方向に周期的境界条件をおけばトーラスとなる．[23, 26] この様な系での分数統計粒子系の構成法は以下述べるようにややこみいったものとなり十分な注意が必要である．ここで我々はくみひも群の表現に基づいた矛盾のない構成法を述べることにする．つまり粒子の配列の変化からなるプロセスを考え，それが元に戻ったときに得られる“位相”の変化が要請されるくみひも群の表現の対応する生成子のそれと同じになるよう構成するわけである．

1. オープンな境界条件（矩形の格子）

分数統計粒子系における統計性の影響は特異ゲージ変換と言われる変換で粒子の位置に完全に局在した磁束による相互作用に変換できる．その時の粒子はハードコアのボゾンと考えられる．この変換の際，連続モデルにおいては複素関数論におけるベキ関数のカットに対応するものを導入することになる．同様の変換を次のように考えれば格子上でも行うことができる．まずハードコアボゾンの基底を準備し特異ゲージ変換からくる相互作用を表現するために粒子位置からのびる方向を持ったストリングをのばす．ゲージ相互作用は左から右へのびるストリングを下から上に切ったとき，そのホッピングによる行列要素はストリング一本あたり $e^{\mathrm{i}\theta}$ の位相変化を与えるとして定めればよい． ただし具体的には粒子が (m, n) にいるときストリングは $(m+1/2,\ n-1/2+m\delta)$ から $(\infty,\ n-1/2+m\delta)$ にのびているとすればよい．ここで $\delta=+0$ は同じ y 座標を持つ粒子からくる特異性を取り除くため導入した（図 3)．

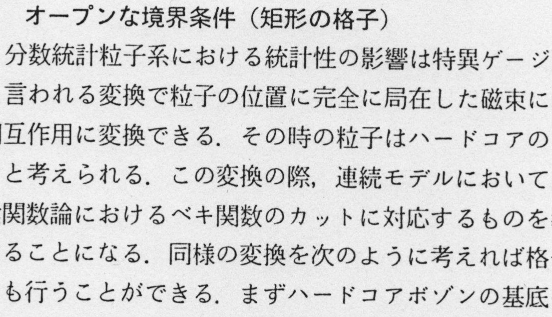

図 3 オープンな境界条件を課した場合の分数統計粒子系の格子上での構成．赤丸は粒子の位置を，緑丸は磁束の位置を示す．

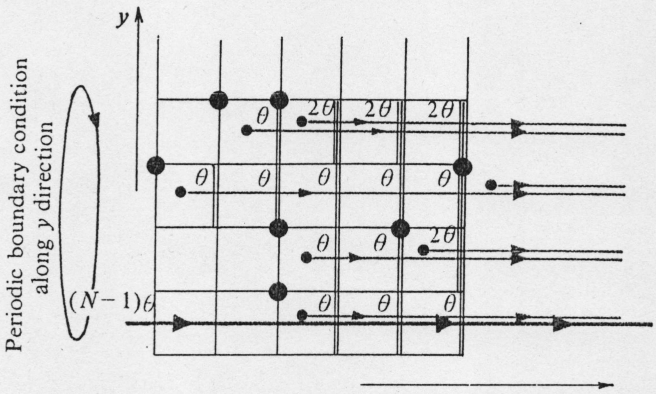

図4　構成法 B による，シリンダー上（一方向に周期的境界条件を課した場合）の分数統計粒子系の格子上での構成．

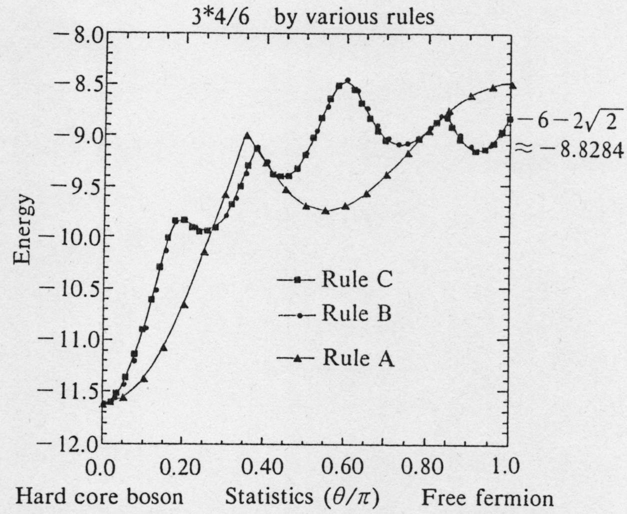

図6　基底状態のエネルギーを統計パラメーター θ の関数として描いたもの．6 個の分数統計粒子を 3×4 の正方格子において一方向に周期的境界条件をおいた系で構成した場合．

2.　一方向の周期的境界条件（シリンダー，円環状の格子）

ここでは例えば，y 方向に周期的境界条件を置いた場合を考えよう．この時にも上述した構成法は適用可能のようにみえる．即ち σ_i に対応する局所的な位相変化の寄与 $\chi(\sigma_i)=e^{\mathrm{i}\theta}$ のみならず，穴を回るプロセスからの寄与に関しても $\rho_{i+1}=\rho_i e^{\mathrm{i}2\theta}$ は成立しているように見える．これを構成法 A と呼ぶ．[20, 24] しかし系の左端にそって粒子が穴を回るプロセスを考えると，この過程は $\exp[\mathrm{i}\,2\pi\Phi-\mathrm{i}(N-1)\theta]$ の位相変化を受け，正しい位相 $\exp[\mathrm{i}\,2\pi\Phi]$ に対して $\Delta\Phi=-(N-1)\theta/2\pi$ のずれがあるのがわかる．そこでこの $\Delta\Phi$ を打ち消すように y 方向のボンドにすべて $\exp(-\mathrm{i}\,\Delta\Phi/L_y)$ の位相を与えればこのずれはなくなる（L_y は y 方向の格子数）．これを構成法 B と呼ぶ[20]（図5）．（ここでは一様に与えた $\exp\{-\mathrm{i}\,\Delta\Phi/L_y\}$ の位相はゲージ変換により 1ヶ所に例えば $y=1/2$ に $\exp\{-\mathrm{i}\,\Delta\Phi\}$ と集めることもできる．）更に全く異なるゲージのとり方に対応して

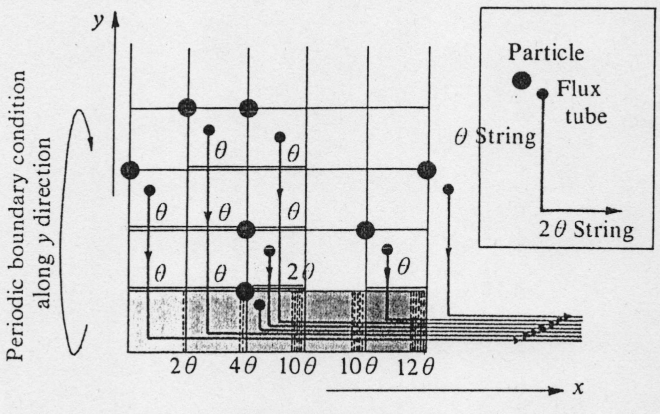

図5　構成法 C による，シリンダー上（一方向に周期的境界条件を課した場合）の分数統計粒子系の格子上での構成．

図5に示すように磁束からのびるストリングを縦に $(m+1/2+n\delta,\ n-1/2)$ から $(m+n\delta+1/2,\ 1/2)$ まで θ の強さで引き，$(m+1/2+n\delta,\ 1/2)$ から $(+\infty,\ 1/2)$ まで 2θ の強さで引くこともできる．ここで δ は同じ x 座標を持つ粒子がある時の特異性を取り除くために導入した．やや奇異に見えるこの方法も正しくくみひも群の表現を実現していることは容易に確かめられる．そこでこれを構成法 C と呼ぶ．[20] 図6に具体的な 3×4 の系に y 方向に周期的境界条件を置き，6 粒子をその上に定義した時の基底状態のエネルギーを θ の関数として A, B, C の方法で計算したものを示した．図よりわかるように B と C は同じエネルギーを与えるが，A はそうではないことがわかるであろう．注目すべきことは $\theta=\pi$（つまりフェルミオン系）の場合で B, C は通常のフォック空間でのフェルミオン系の構成法と一致することがわかるが，A は N が偶数の時は y 方向の反周期的境界条件に対応してしまう．一般の統計の場合構成法 A は，統計性 θ に依存する余分な磁束を伴うので正しい構成法ではない．

3.　x,y 両方向に周期的境界条件を果たした場合（トーラス状の格子）[23, 26]

トーラス上での分数統計粒子の系に x,y 両方向の周期的境界条件をおいたとき，系はトーラスであると考えられる．このとき，トーラス上のくみひも群の考察からわかる様に $\theta/\pi=p/q$ としたとき多粒子系の波動関数は必然的に q 個の成分を持たなければならない．つまり N 粒子系の波動関数は $\Psi(x_1,\cdots,x_N;\alpha)$，$\alpha=1,\cdots,q$ となる．くみひも群の表現を実現するためには，格子上に二つのカット A, B を，A は $y=1/2$ に，B は $x=L_x+1/2$ におく（図7）．粒

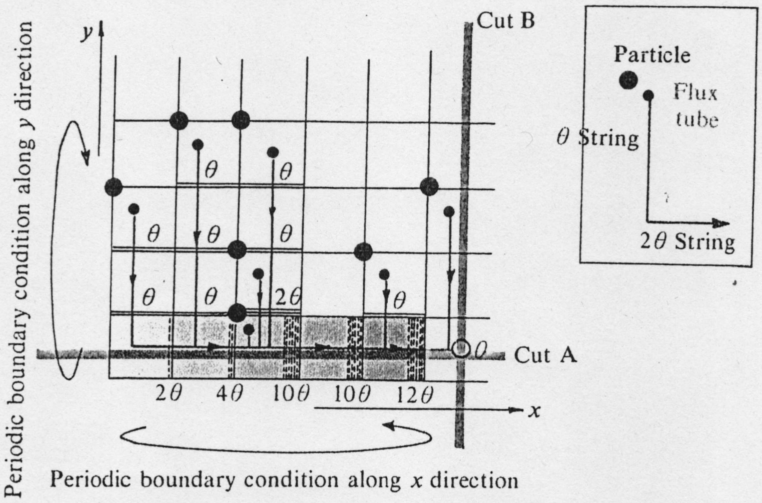

図7　トーラス上（xy 両方向に周期的境界条件を課した場合）の分数統計粒子系の格子上での構成．

子のストリングはシリンダーの場合の構成法Cのようにとる．ただし 2θ ストリングは $O=(L_y+1/2,\ 1/2)$ で終わるとする．カット A では (3.11b) よりシートの指数 s に依存する $\exp\{i2(s+\eta)\theta+i2\pi\Phi_y\}$ の位相変化を与える．これは，くみひも群の表現 $\chi(\rho_i)$ に対応する．カット B では (3.11a) よりシリンダーの場合と同様な $\exp\{+i(N-1)\theta+i2\pi\Phi_x\}$ の位相変化を与える他に，シート（成分）の指数がひとつ $s\to s+1$ とずらす効果を与える．これは，くみひも群の表現 $\chi(\tau_i)$ に対応する．当然ながら，粒子数 N は，$\exp(i2\theta N)=1$ を満たさなければならない．この条件によりストリングの終点 O は一見，磁束を与えるが，それが物理的影響を与えないことになる．ほぼ同様な構成法は論文[26]でも与えられているが，その無矛盾性は必ずしも保証されていない様に見える．

V.　エネルギースペクトルの対称性とアハラノフ・ボーム効果

ここでは分数統計に従う N 粒子系の対称性を議論したい．そのために代表的な物理量として系のエネルギースペクトルを取り上げる．[20, 23] エネルギースペクトルは一般には，系の統計パラメター θ およびハンドル(穴)を貫く磁束 Φ_i の関数となることに注意する．

1.　トーラス

トーラス上で系のエネルギーが満たす関係式を示す．

$$\begin{aligned}
E(\theta,\phi_x,\phi_y)&=E(-\theta,\phi_x,\phi_y)=E(\theta,-\phi_x,\phi_y)\\
&=E(\theta,\phi_x,-\phi_y),\\
E(\theta,\phi_x,\phi_y)&=E(\theta,\phi_x+\phi_0^*,\phi_y)\\
&=E(\theta,\phi_x,\phi_y+\phi_0^*),
\end{aligned}\tag{5.1}$$

ここで $\phi_0^*=hc/e^*$ は有効電荷 e^* の分数統計粒子系の磁束単位である．驚くべきことに系がトーラスの場合に次の関係が成立する．[23, 26]（統計は $\theta=\pi p/q$ とする．）

$$\begin{aligned}
E(\theta,\phi_x,\phi_y)&=E\Big(\theta,\phi_x+\frac{1}{q}\phi_0^*,\phi_y\Big)\\
&=E\Big(\theta,\phi_x,\phi_y+\frac{1}{q}\phi_0^*\Big).
\end{aligned}\tag{5.2}$$

これは系のアハラノフ・ボーム効果の周期が通常の磁束単位 ϕ_0^* より q 分の1に縮んでいることを示す．トーラス上では端を定義できないからループの名前付けをどこから始めるかは任意である．すなわち $\chi(\rho_i)$ は $\chi(\rho_{i+1})$ とユニタリ同値である．対応して，また (3.8a) において η を1増加させる(異なる表現をとる)ことは Φ_x を θ/π 減らすことと同じであることになる．[23] これらが，アハラノフ・ボーム効果の周期が縮んだ理由である．このトーラスの場合の具体的な数値計算を図8に示す．

このことは物理的には非常に重要な効果をもたらす．一つには電荷 e^* 統計 $\theta=\pi p/q$ の分数統計粒子が準粒子としてトーラス上に定義できるならば，その磁束単位は $\phi_0^*/q=hc/(e^*q)$ となる．例えばセミオンによる超伝導が実現すれば，粒子が対を構成していなくてもその磁束単位は $\phi_0/2$ と常にBCS的なペアリング理論によるものと同じになる．もう一つの重要な物理的帰結として電子系における準粒子の電荷に対する制限がある．電子系のある状態が有効理論として電荷 e^* 統計 $\theta=\pi p/q$ の分数統計粒子系によ

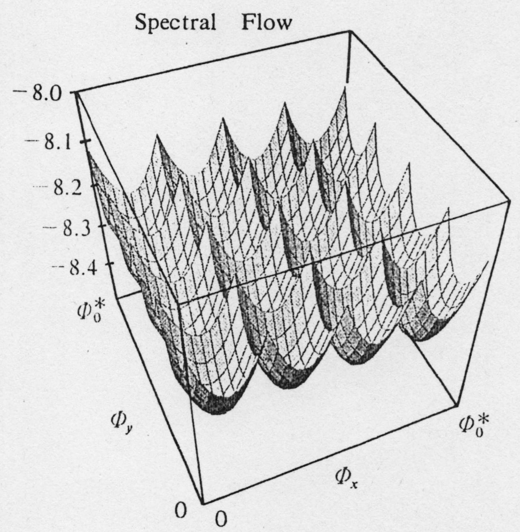

図8　$\theta=\pi/4$ の分数統計粒子系のエネルギースペクトルをトーラス上で xy 両方向の中心を貫く磁束を変化させながら計算したもの．3個の分数統計粒子を3×3の正方格子において xy 両方向に周期的境界条件をおいた系．

り記述できるとする．このとき系のゲージ不変性に起因するアハラノフ・ボーム周期として，有効理論の構成粒子の磁束単位 ϕ_0^* の他に電子の磁束単位 $\phi_e = \mathrm{hc}/e$ がなければならない．そのためには n をある整数として $n\phi_0^*/q = \phi_e$ が必要である．すなわち

$$\frac{e^*}{e} = \frac{n}{q}$$

となる．電子系における，トーラス上の準粒子による有効理論においては，その電荷 e^* と統計 $\theta = \pi p/q$ は無関係ではなく上述の様な制限がある．この結論は系の対称性による結果であり，不純物があっても厳密に成立する．[23, 27]

VI. ゲージ不変性と分数量子ホール効果及び隠れた Z_q 対称性

前節の終わりにゲージ不変性による分数電荷をもつ有効理論における電荷に対する制限をトーラス上で議論したが，この節でより一般的な系において議論する．分数量子ホール効果の理論においては分数電荷が存在することが知られており，また最近分数電荷が実際に観測にかかっているとの報告がある．[28] これらの系は当然ながら電子から構成されている系であり，そこに分数電荷が存在するわけである．このようなとき系を分数電荷を持つ粒子系での有効理論によって考えることもできる．そのような際，系が位相的に自明でなくアハラノフ・ボーム効果を考え得る状況を考えてみよう．有効理論の磁束単位は $\phi^* = \mathrm{hc}/e^*$ であるから一般に電子の磁束単位 $\phi_e = \mathrm{hc}/e$ より大きい．すなわち，有効理論はそのままでは電子系のゲージ不変性を保証しない．問題は如何なる有効理論（の波動関数）が電子系のゲージ不変性を回復させるかを以下議論する．[27]

系が円環であり統計 θ として M 成分の波動関数を考えると，$\chi(\rho_j)$ に対応するくみひも群の表現は

$$\chi(\rho_j)[\theta, \phi] = \exp\left\{ \mathrm{i}2\pi \frac{\phi}{\phi_0^*} + \mathrm{i}2\theta(j-1) \right\} T \qquad (6.1)$$

となる．ここで T は θ, ϕ によらないユニタリ行列である．条件は ϕ と $\phi + \phi_e$ が同等な系となることであるが，それはくみひも群の表現としては $\chi(\rho_j)[\theta, \phi]$ と $\chi(\rho_j)[\theta, \phi + \phi_e]$ とがユニタリ同値であることが必要十分である．よって $\phi_e/\phi_0^* = e^*/e$ を使い

$$\exp(\mathrm{i}2\pi e^*/e)T \cong T \qquad (6.2)$$

となる．ここに n を整数とすれば

$$\frac{e^*}{e} = \frac{n}{M}, \quad \text{or} \quad M = n\frac{e}{e^*} \qquad (6.3)$$

となる．これは T の絶対値 1 の固有値が $\exp(\mathrm{i}2\pi e^*/e)$ をかけることにより互いに移り変わることを要求する．表現が既約であることも要求すれば，適当な基底の下で

$$T = e^{\mathrm{i}\lambda} W = e^{\mathrm{i}\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W^M = I_M \qquad (6.4)$$

とされる．以下述べるように物理的にはこの議論からいくつかの大切な結果が得られる．

[1] 分数電荷の系を電子系の準粒子系ととらえるならば，準粒子の波動関数は $\Psi'(x_1, \cdots, x_N; s)$ のようにシートの指数を持つ．すなわち，波動関数を指定するのに粒子の空間の位置だけでは十分でない．これは一見奇妙に見えるが，電子と準粒子の異なる二つのゲージ不変性を保つために必要となる．なお同様の多重シートの波動関数は分数量子ホール効果のエッジ状態の議論の際にも現れることが Wen により指摘されている．

[2] 分数電荷粒子が円環の穴を一周したとき，系は元に戻るのではなく M 回まわって初めて元の状態にもどることになる．

[3] 古典的なハミルトニアン（シートを考えない場合のハミルトニアン）はシートの座標を含まないから，シート方向の並進の演算子 W と古典的ハミルトニアンは可換となる．すなわち W の固有値は（隠れた位相的）量子数を与え，系に対称性をもたらす．例えば現実の系の不純物等によるランダムポテンシャルは空間的にはランダムであるが，シート方向には厳密なコピーであるから，この対称性を破ることはできない．

[4] (6.4) の T の固有値は $\exp(\mathrm{i}2\pi j/M)$, $j = 1, \cdots, M$ であるから

$$\chi(\rho_j(\phi)) \equiv \chi(\rho_j(\phi + \phi_0^*/M)) \qquad (6.5)$$

となり，エネルギースペクトル $\{E_\alpha\}$ において，任意の α に対して

$$E_\alpha(\phi) = E_{\alpha'}(\phi + \phi^*/M) \qquad (6.6)$$

を満たす α' が必ず存在する．更に各状態は W の固有値によって M 個のセクターに分類できる．異なるセクターは 1 成分の波動関数としては，異なる磁束の系に対応している．一般に全ての状態が $\phi_e = \phi^*/M$ を周期としているのではなく，ϕ_e ごとに互いの状態が移り変わることにより電子系のゲージ不変性を回復させているのである．

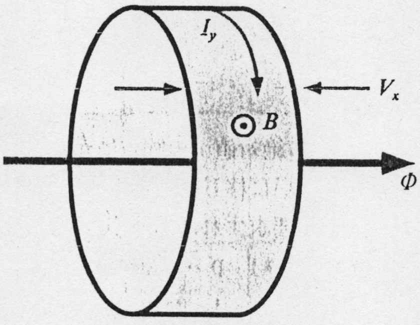

図9　整数量子ホール効果の議論の際ラフリンによって使われた仮想実験の配置．この系において分数電荷の準粒子の波動関数から始めて分数量子ホール効果を議論する．

最後に上述の結論の分数量子ホール効果に対する関連を述べよう．そのためにラフリン[11]とハルペリン[12]により整数量子ホール効果に対して行なわれたゲージ不変性の議論を応用する．その分数量子ホール効果への応用[13]を上述の議論を踏まえて振り返ってみよう．[23, 27, 29] まず図9の配置の系を考える．そこで中心の磁束を電子の磁束単位 ϕ_e だけ断熱的に増加させる．ただし系のフェルミ準位は不純物によるランダムポテンシャルにより局在状態にピン止めされているとする．このとき電子系の波動関数が満たすべきシュレディンガー方程式はゲージ変換により磁束が変化する以前と同じものにとれるから，基底状態に縮退がない限りもとの状態に戻っている．この過程で変化したエネルギーは n を整数として $\Delta E = neV_x$，磁束変化 $\Delta\phi = \phi_e$ であるから，Byers-Yang の公式より $\sigma_{xy} = I_y/V_x = n(e^2/\mathrm{hc})$ となる．これが整数量子ホール効果の状況である．つまり分数量子ホール効果が起こるためには，電子系の基底状態に縮退がなければならない．もしその縮退のために中心の磁束を電子の磁束単位 ϕ_e の q 倍変化させて初めて元の状態に戻ったとすれば $\Delta\phi = q\phi_e$ となり，$\sigma_{xy} = (n/q)(e^2/\mathrm{hc})$ と分数量子ホール効果を許す．$e^* = e/q$ の分数電荷の準粒子による有効理論から考えるならば，この議論は次のようになる．磁束単位は当然 $\phi^* = q\phi_e$ であり，それだけ磁束を変化させる間にした仕事は，n を整数として $\Delta E = neV_x$ となる．なぜならば実際に系を横切ってエネルギーを運んだのは現実の電子に他ならないからである．よって $\sigma_{xy} = (n/q)(e^2/\mathrm{hc})$ となる．言い換えると円環またはシリンダーを一周するだけでは系は元の状態に戻らず，q 回まわって初めて元の状態に戻るわけである．その意味で波動関数は系の穴を一周する操作または，電子系のゲージ変換に対する対称性を破っているのである．以上の議論はラフリンにより提唱された $\nu = 1/q$ のランダウ・レベルの占有率のとき $e^* = 1/q$，$\theta = \pi/q$，$\sigma_{xy} = (n/q)(e^2/\mathrm{hc})$ であるとの議論と無矛盾である．

参考文献

1) J. M. Leinaas and J. Myrheim: Nuovo Cimento **37B** (1977).
2) F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1144, **49** (1982) 957.
3) R. B. Laughlin: Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.
4) B. I. Halperin: Phys. Rev. Lett. **30** (1984) 1583.
5) D. Arovas, J. R. Schrieffer and F. Wilczek: Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 722.
6) F. Wilczek: *Factional Statistics and Anyon Superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990).
7) *The Quantum Hall Effect*, ed. R. E. Prange and S. M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1987).
8) V. Kalmeyer and R. B. Laughlin: Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 2095.
9) R. B. Laughlin: Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 2677.
10) Y. S. Wu: Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2103.
11) R. B. Laughlin: Phys. Rev. B **23** (1981) 5632.
12) B. I. Halperin: Phys. Rev. B **25** (1982) 2185.
13) R. Tao and Y. S. Wu: Phys. Rev. B **31** (1985) 6859.
14) N. Byers and C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. **7** (1961) 46.
15) X. G. Wen: Phys. Rev. B **40** (1989) 7387.
16) X. G. Wen, F. Wilczek and A. Zee: Phys. Rev. B **39** (1989) 11413.
17) 青木秀夫：固体物理 **24** (1989) 777.
18) 北沢良久：日本物理学会誌 **45** (1990) 501.
19) D. J. Thouless and Y. S. Wu: Phys. Rev. B **31** (1985) 1191.
20) Y. Hatsugai, M. Kohmoto and Y. S. Wu: Phys. Rev. B **43** (1991) 2661.
21) J. S. Birman: Commun. Pure & Appl. Math. **22** (1969) 41; *Barids, Links and Mapping Class Groups* (Princeton University Press, 1975).
22) T. Einarsson: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1995.
23) Y. Hatsugai, M. Kohmoto and Y. S. Wu: Phys. Rev. B **43** (1991) 10761.
24) G. Canright, S. M. Girvin and A. Brass: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2291.
25) G. Canright, S. M. Girvin and A. Brass: Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 2295.
26) X. G. Wen, E. Daggoto and E. Fradkin: Phys. Rev. B **42** (1990) 6110.
27) Y. S. Wu, Y. Hatsugai and M. Kohmoto: Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 659.
28) R. G. Clark, J. R. Malett, S. R. Haynes, J. J. Harris and C. T. Foxon: Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1747. J. A. Simmons, H. P. Wei, L. W. Engel, D. C. Tsui and M. Shayegan: *ibid.* **63** (1989) 1731.
29) D. Thouless: Phys. Rev. B **40** (1989) 12034.

非会員著者の紹介： 著者の一人である Yong-Shi Wu 氏は 1942 年中国生まれ．1965 年北京大学修士取得，その後 1976 年までの間に博士号取得．現在，ユタ大学物理学科教授．専門は素粒子理論，統計物理学．1982 年 Chinese National Prize of Natural Science, 3rd Grade を受賞．