# 解析力学：現代的視点から

筑波大学物理学系　初貝 安弘[1]

平成19 年6 月20 日版

by Y. Hatsugai, 2007

# 目 次

# 第1章　ニュートン方程式から解析力学へ

日常の世界で物理系の運動は（力）＝（質量）×（加速度）というニュートンの運動方程式に従うことに疑いはありません。これについては皆さんよくご存じのことと思います。この方程式に従う物理系は古典力学系と呼ばれます。この系のより深い理解および量子物理学による記述のためには、この古典系の運動法則をより数学的に整備した形に記述しておくことが重要です。この記述法は解析力学とよばれ、それ自身現在でも理論的研究対象となるような一分野をつくっています。まずは質点系を取り上げ、そのうち基本的な部分に関して詳しく自己完結的に説明したいと思います。その後にいくつかより一般的な記述に関して触れたいと思います。

## 1.1　ポテンシャル力と力学的エネルギーの保存則

まず１次元の質量 $m$ の粒子の運動を考えましょう。実際の質点の運動は当然３次元のものですが、その本質的部分はすでにこの１次元系での記述に現れています。以下の議論でもできる限りこの１次元の例を繰り返しその導入に使いたいとおもいます。１次元系では粒子の位置座標は１つの変数 $x$ で表されますのでニュートンの運動方程式は時刻 $t$ において座標 $x(t)$ にある質点に働く力を $F(t)$ として

$$F = m\ddot{x}, \qquad \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

となります。ここで力 $F(t)$ が時刻に直接よらず質点の場所だけで $F = F(x(t))$ と決定されるような場合を考えてみましょう。この時、ニュートン方程式に $\dot{x}$ を書けてつぎのような関係が導かれます。

$$\dot{x}F = \frac{dx(t)}{dt}F(x(t)) = m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{x})^2\right)$$

ここで時刻 $t_i$, $t_f$ の質点の座標を $x_i = x(t_i)$, $x_f = x(t_f)$ としてこの時間間隔で時間積分することにより、合成関数の微分公式に注意すれば, 粒子の行った仕事 $W$

を次のように定義して

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{dx(t)}{dt}F(x(t)) = \int_{x_i}^{x_f} dx\,F(x) \equiv W = T(t_f) - T(t_i)$$

となります。ここで $T(t) = \frac{1}{2}mv^2$ は $v(t) = \dot{x}(t)$ が速度ですから運動エネルギーです。この関係式は 粒子が受けた仕事の量だけ粒子の運動エネルギーが増加したと解釈されます。このとき $x_i$ を固定して $x_f$ の関数として $V$ を $V(x_f) = -\int_{x_i}^{x} dx\,F(x)$ と定義すれば ( $F$ の不定積分の符号を変えたものです。)

$$T(t_i) + V(x_i) = T(t_f) + V(x_f)$$

となり $T+V$ が運動の初めと終わりで変化しないことが示せます。ここでこの左辺 $\int_{x_i} dx$ この時 $F$ を 保存力 とよび $V$ を ポテンシャル, $E = T + V$ を (力学的) 全エネルギー と呼びます。また、この $F$ はポテンシャル力とも呼ばれます。これが 力学的エネルギーの保存則 です。

１次元の問題はこれで完全に理解できましたから、同じことを３次元において考えてみましょう。まず運動方程式は時刻 $t$ における質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = ^t(x,y,z) = ^t(x61, x^2, x^3)$、質点に働く力を $\boldsymbol{F}(t)$ として次のようになります。

$$\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}, \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

１次元と同様に $\boldsymbol{F}$ が質点の位置 $\boldsymbol{r}$ にのみ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))$ と依存するときを考えてみましょう。つまり、運動方程式の両辺と $\dot{\boldsymbol{r}}$ との内積をとったものを時間積分して

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{F} = T(t_f) - T(t_i) \qquad (1.1)$$

となりますが、この左辺を次のように書いて曲線 $C$ にそった 線積分 と呼びます。

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\,\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{F} =\equiv \int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1,n}\Delta\boldsymbol{r}_k\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_k)$$

$\Delta\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1}$, $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}(t_i + k\Delta t)$, $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{n}$. ここで曲線 $C : \boldsymbol{r}(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ は質点の運動の経路（世界線）を意味します。一般にはこの積分の値は世界線（経路）の始点と終点のみでは決まらず、粒子がどのような履歴をたどったか（経路 $C$）に依存しますが、ここではこの値が途中の経路には依存しない場合を考えます。これは経路が取り得る領域が単純な形状（単連結）でであり力 $\boldsymbol{F}$ が全領域に

おいて特異性なく定義されている場合に対応します。この時 $\boldsymbol{F}$ は次のようにある空間座標の関数 $V(\boldsymbol{r})$ から

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V \equiv= -\mathrm{grad}\, V = -\begin{pmatrix} \partial_x V \\ \partial_y V \\ \partial_z V \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

と定まることが知られています。

以上まとめて (1.1) より、

$$V(\boldsymbol{r}_f) - V(\boldsymbol{r}_i) = T(t_f) - T(t_i)$$

これを書き直せば

力学的エネルギーの保存

質量 $m$ の質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ から導かれる保存力の時

$$T + V = \mathrm{const.} \tag{1.2}$$

$$T(t) = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2, (\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}(t)), \quad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V.$$

となります。この講義では力は特に断らない限り、ここでの議論のような保存力のみを考えることとします。

### ポテンシャルの存在について

上述の条件下で経路によらず仕事が一定の時、力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャル $V$ から $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ と導かれます。まず、これが十分条件であることは次のように簡単に確認できます。

$$\int_C d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} V = \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{\mu=1,2,3} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d}{dt} V(\boldsymbol{r}(t)) = V(\boldsymbol{r}_f) - V(\boldsymbol{r}_i)$$

この逆すなわちここでの仮定のもとで $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} V$ となる空間座標の関数（スカラー場） $V$ が存在することは次のようにして確認できます。（これはより進んだ立場からはフロベニウスの補題とおばれる事実の特別な場合とみなせます。）

まず仮定から任意の 2 つの経路 $C_1, C_2$ に対してその仕事が等しいので

$$\int_{C_1} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = \int_{C_2} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F}, \quad \oint_{C_{12}} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

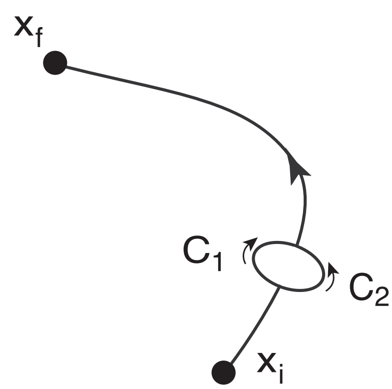


図 1.1: aa

となります。ここで $C_{12}=C_2-C_1$ は、$C_1$ で行って $C_2$ で戻る閉曲線を意味します。

ここで単連結な領域では任意のベクトル場がベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とスカラー場 $f$ から次のように書けるという ヘルムホルツの定理

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}V$$

ならびに積分定理（ストークスの定理）から

$$\int d\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\oint_{C_{12}}d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}=0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$$

ここで $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\nabla}V=0$ という事実を使いました。[2] 更に[3]

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$$

より $\boldsymbol{A}'\equiv\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}g$ とすれば

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}'=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}+\Delta g$$

よって $g$ を次の方程式（ポアソン方程式）の解とすれば $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}'=0$

$$\Delta\boldsymbol{g}=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

となるので一般に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$ として一般性を失いません。この仮定の下では、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は次のラプラス方程式をみたしますが、この方程式は仮定の領域内では自明な解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ のみをもつので

$$\Delta\boldsymbol{A}=0$$

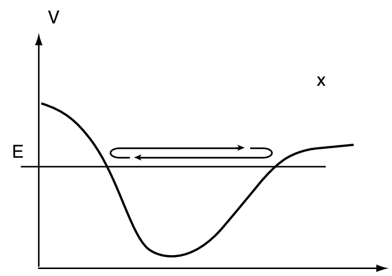


図 1.2:

から $\boldsymbol{A}=0$ となります。以上まとめて

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}^{\exists}V$$

と書けることとなります。

**ポテンシャル力の簡単な例**

- 調和振動子

  ポテンシャル力の最も簡単で勝つ重要な例として次の調和振動子がある。

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x \rightleftarrows V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad 1\text{次元}$$
$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\omega^2 \boldsymbol{r} \rightleftarrows V = \frac{1}{2}m\omega^2 \boldsymbol{r}^2 \quad 3\text{次元}$$

- 一次元系

## 1.2 作用積分と最小作用の原理

粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ が与えられたとき、ニュートン方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ は粒子の時間発展を定める 2 階の常微分方程式ですから、一意的な解、すなわち粒子の運動を定めるためには初期条件として特定の時間 $t_i$ での粒子の位置 $\boldsymbol{r}_i$ と速度 $\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$ を与えることで $t_i$ 以降の粒子の運動が定まります。

ここで、少し異なった視点を導入しましょう。まず、粒子の運動を世界線 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ なる関数とみたとき、この関数を一つ定めたとき作用積分(action) と呼ばれる実数

の積分量をいわゆるラグランジュ関数 (Lagrangian) $L$ から次のように定めます。

$$S[\boldsymbol{r}(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$$
$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = T(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) - V(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r})$$

ここで通常の関数は独立変数の値を定めることにより値が確定しますが、この作用積分は世界線である関数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ をさだめることによって初めてその値が確定するので $S[\boldsymbol{r}(t)]$ は汎関数と呼ばれます。

$$\text{関数} : x \to f(x) \in \mathbb{R}$$
$$\text{汎関数} : f(x) \to I[f(x)] \in \mathbb{R}$$

なお被積分関数の $L$ は文字通り関数であることに注意しましょう。

ここで最小作用の原理は運動方程式（ニュートン方程式）をみたす世界線（粒子の運動の軌跡）が次のように定まることを述べます。

**最小作用の原理**

定まった時空間の点 $(t_i, \boldsymbol{r}_i)$ から始まり $(t_f, \boldsymbol{r}_f)$ におわる粒子の軌跡（世界線）は運動方程式を満たすとき作用積分を最小 (停留) とする。

$$\delta S = 0 \tag{1.3}$$

ここで関数 $f(x)$ の最小は変数 $x$ を $x \to x + \delta x$ と微小変化させたときの関数の極値の条件 $\delta f = f(x + \delta x) - f(x) = 0$ から定まることに対応して、汎関数 $S[\boldsymbol{r}(t)]$ の最小も関数の微小変化 $\boldsymbol{r}(t) \to \boldsymbol{r}(t) + \delta \boldsymbol{r}(t)$ に対応する停留条件として $\delta S = S[\boldsymbol{r}(t) + \delta \boldsymbol{r}(t)] - S[\boldsymbol{r}(t)] = 0$ から定まることに注意しましょうまたこの最小作用の原理はハミルトンの原理とも呼ばれます。

## 1.3 オイラー・ラグランジュ(Euler-Lagrange) 方程式

最小作用の原理を具体的に確認するためには関数の微分に対応する、汎関数の変分という概念が必要です。これをまず１次元系について説明します。微少関数の $\epsilon(t)$ による関数 $x(t)$ の変化 $x(t) \to x(t) + \epsilon(t)$ に対してその時間微分は $\dot{x}(t) \to \dot{x}(t) + \dot{\epsilon}(t)$ ですからラグランジュ関数は関数を引数とする通常の関数なので最低次のテイラー展開として次のように評価できます。ただし仮定から時空間の始点と終点では関

数 $x(t)$ は変化しないとします。$(\epsilon(t_i)=\epsilon(t_f)=0)$

$$
\begin{aligned}
\delta S = S[x(t)+\epsilon(t)]-S[x(t)] &= \int_{t_i}^{t_f} dtL(x+\epsilon,\dot{x}+\dot{\epsilon},t)-\int_{t_i}^{t_f} dtL(x+\epsilon,\dot{x}+\dot{\epsilon},t) \\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\epsilon(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\epsilon}(t)\right\} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

ここで $\frac{\partial L}{\partial x}$、$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ はそれぞれ通常の関数 $L(x,\dot{x},t)$ の第１引数、第２引数についての偏微分であることに注意しましょう。よって式 (1.4 ) の第２項を部分積分して $(\epsilon(t_i)=\epsilon(t_f)=0)$ に注意すれば

$$
\int_{t_i}^{t_f} dt\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\epsilon}(t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\epsilon(t)\Big|_{t_i}^{t_f}-\int_{t_i}^{t_f} dt\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}\epsilon(t)
$$

より、

$$
\delta S=\int_{t_i}^{t_f} dt\left\{\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}\epsilon(t)
$$

ここで汎関数の停留条件 $\delta S=0$ を要求すれば、$\epsilon(x)$ が任意関数であることから次の オイラー・ラグランジュ方程式(オイラー方程式) が作用積分の停留条件として導けます。

オイラー・ラグランジュ方程式

$$
\delta S=0 \leftrightarrows \frac{\delta S}{\delta x}\equiv\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0 \qquad (1.5)
$$

ここでの一変数の場合 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$ となりますからオイラーラグランジュ方程式を具体的に計算すれば次のようになります。

$$
\frac{\delta S}{dx}=\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dt}m\dot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}-m\ddot{x}=0
$$

これは確かにニュートン方程式ですから、この１次元系の場合に最小作用の原理が確認できたことになります。

３次元中を運動する質点の場合作用積分は質点の座標 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ という３つの関数から定まる汎関数となります。そこでまえと同様に３つの微小関数 $\epsilon_x(t)$, $\epsilon_z(t)$, $\epsilon_{zx}(t)$ $(\epsilon_{x,y,z}(t_i)=\epsilon_{x,y,z}(t_f)=0)$ に対する作用積分の変分を考えてみま

しょう。そのためにラグランジュ関数 $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ の変化を次のとおり評価します。

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial x}\epsilon_x(t) + \frac{\partial L}{\partial y}\epsilon_y(t) + \frac{\partial L}{\partial z}\epsilon_z(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\epsilon}_x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{\epsilon}_y(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{\epsilon}_z(t) \\ &= \sum_{k=1,2,3}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\epsilon^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{\epsilon}^k\right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^k}\epsilon^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{\epsilon}^k\end{aligned}$$

ここで、$q^1 = x,\ q^2 = y,\ q^3 = z$ とし、２度出てくる添字については和を暗黙にとるアインシュタインの記法を用いました。これを用いて１次元の時と同様に一度部分積分すれば

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{\frac{\partial L}{\partial q^k}\epsilon^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\dot{\epsilon}^k\right\} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right\}\epsilon^k(t) \tag{1.6}$$

ここで $\epsilon^k(t)$ は任意ですからオイラー方程式は

$$\frac{\delta S}{\delta q^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0,\ k = 1, 2, \cdots, f,\ (f = 3)$$

となります。このようにラグランジュ関数を記述する関数を一般化座標とよび、この $f$ を自由度といいます。

## 1.4 具体的な物理系のラグランジュ形式による記述

### 1.4.1 相互作用する質点系

まず質量 $m_i,\ i = 1, \cdots, N$ のお互いに相互作用する $N$ この質点系を考えましょう。ただし $\boldsymbol{r}_i,\ \boldsymbol{r}_j$ にある粒子間の相互作用は $V_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ と相対座標にのみ依存するとします。ここで、この系のラグランジュ関数として

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ T &= \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \\ V &= \sum_{i<j} V_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\end{aligned} \tag{1.7}$$

を考えてみましょう。対応してオイラー方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial r_i^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial r_i^\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial r_i^\alpha} + m_i \ddot{r}_i^\alpha \tag{1.8}$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{\nabla}_i V = -\boldsymbol{\nabla}_i \sum_{j\neq i} V_{ij} \tag{1.9}$$

となります。この運動は外力が働かない内力による運動であるから定義する重心は力を受けず等速度運動することに注意しましょう。

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m} \tag{1.10}$$

これは (1.9) より

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \frac{2}{\sum_i m_i} \sum_{i<j} (\boldsymbol{\nabla}_i + \boldsymbol{\nabla}_j) V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = 0 \tag{1.11}$$

と確認できます。

### 1.4.2 電磁場中の荷電粒子

今度は電磁場中を運動する質量 $m$, 電荷 $e$ の荷電粒子の運動を考えましょう。この系の運動はよく知られたローレンツ力による運動ですから、その運動方程式は次のようになります。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) \tag{1.12}$$

ただし $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ はそれぞれ粒子の位置での電場と磁場の値を意味します。この系のラグランジュ関数として次のものを考えてみましょう。

**電磁場中の荷電粒子のラグランジュ関数**

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi + e\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2} m \dot{r}_\alpha \dot{r}_\alpha - e\phi + e\dot{r}_\alpha A_\alpha \tag{1.13}$$

ただし、$\phi, \boldsymbol{A}$ はそれぞれスカラーポテンシャルベクトルポテンシャルとよばれる空間各点で定まる基本的な物理量の粒子位置での値であり、これらは直接の観測量ではありませんが、実際の観測量である、電場、磁場とは次のような関係があります。

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} \tag{1.15}$$

ここで、ここであたえたラグランジュ関数がローレンツ力による運動を記述することを確認してみましょう。まず運動方程式をポテンシャルにより次のように書き直します。

$$\begin{aligned}
m\ddot{r}_\alpha &= e\left( -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \partial_\alpha \phi + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{r}_\beta B_\gamma \right) \\
&= e\left( -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \partial_\alpha \phi + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{r}_\beta \epsilon_{\gamma\kappa\rho}\partial_\kappa A_\rho \right) \\
&= e\left( -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \partial_\alpha \phi + (\delta_{\alpha\kappa}\delta_{\beta\rho} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\kappa})\dot{r}_\beta \partial_\kappa A_\rho \right) \\
&= e\left( -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \partial_\alpha \phi + \dot{r}_\beta \partial_\alpha A_\beta - \dot{r}_\beta \partial_\beta A_\alpha \right) \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

続いてオイラー方程式を計算すれば以下のようになります。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} &= \left( -e\partial_\alpha \phi + e\dot{r}_\beta(\partial_\alpha A_\beta) \right) - \frac{d}{dt}\left( m\dot{r}_\alpha + eA_\alpha \right) \\
&= \left( -e\partial_\alpha \phi + e\dot{r}_\beta(\partial_\alpha A_\beta) \right) - \left( m\ddot{r}_\alpha + e(\frac{\partial}{\partial t}A_\alpha + \dot{r}_\beta \partial_\beta A_\alpha) \right) \\
&= -m\ddot{r}_\alpha + e\left( -\frac{\partial}{\partial t}A_\alpha + \partial_\alpha \phi + \dot{r}_\beta \partial_\alpha A_\beta - \dot{r}_\beta \partial_\beta A_\alpha \right)
\end{aligned}$$

つまりここで与えたラグランジュ関数は正しく運動を記述することが確認できたこととなります。

### ゲージ変換

ここで $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ を任意の時空間の関数、つまり場の量として、次のゲージ変換を考えて見ましょう。

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \qquad (1.17)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (1.18)$$

なお電場と磁場は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}' &= \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}' = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\nabla}\chi = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{E}' &= -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{\nabla}\phi' = \left( -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} - \frac{\partial \boldsymbol{\nabla}\phi}{\partial t} \right) - \boldsymbol{\nabla}\left( \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

と不変ですからローレンツ力による運動も当然不変であるべきですが、ラグランジュ関数は次のように変換を受け

$$
\begin{aligned}
L' &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi' + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}' \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}) + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi) \\
&= L + e\left(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \\
&= L + e\left(\dot{r}_\beta\partial_\beta\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t}\right) \qquad (1.19) \\
&= L + e\frac{d}{dt}\chi(\boldsymbol{r}(t),t) \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

となります。この最後の行の導出ではラグランジュ関数中のポテンシャルは質点の座標により書かれていることに注意しましょう。またラグランジュ関数は $\chi$ の全微分だけことなることにも注意しましょう。

このときラグランジュ形式において運動を決定するオイラー方程式は不変であることが次の計算からわかります。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L'}{\partial r_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{r}_\alpha} &= \left(\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} + e\dot{r}_\beta\partial_\alpha\partial_\beta\chi + e\partial_\alpha\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} + e\partial_\alpha\chi\right) \\
&= \left(\frac{\partial L}{\partial r_\alpha} + e\dot{r}_\beta\partial_\alpha\partial_\beta\chi + e\partial_\alpha\frac{\partial\chi}{\partial t}\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} - e\big(\frac{\partial}{\partial t}\partial_\alpha\chi + \partial_\alpha\dot{r}_\beta\partial_\beta\chi\big) \\
&= \frac{\partial L}{\partial r_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

なお作用積分ば次のような変換を受けることにも注意しておきましょう。

$$
\begin{aligned}
S'[\boldsymbol{r}(t)] &= S[\boldsymbol{r}(t)] + e\int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{d\chi}{dt} \qquad (1.22) \\
&= S[\boldsymbol{r}(t)] + e(\chi(\boldsymbol{r}(t_f),t_f) - \chi(\boldsymbol{r}(t_i),t_i)) \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

始点と終点では変分の過程において世界線は固定されていますから作用積分は定数しか違わず、運動方程式が不変であることはこの議論からは自明となります。

## 1.5 ラグランジュ形式からハミルトン形式へ

### 1.5.1 正準方程式

以上ニュートンの運動方程式をのラグランジュ形式の解析力学として記述し直しましたが、さらにもう一段書き直すことを考えましょう。

一般に自由度 $N$ の系のラグランジュ関数 $L$ は一般化座標 $q = q^1, \cdots, q^N$ とその時間微分 $\dot{q} = \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^N$ の関数として与えられますが、ここで一般化運動量を

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{1.24}$$

により定義しましょう。ここで $p_k = p_k(\{q_i\})$ の関係式が $\dot{q} = \{\dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^N\}$ に関して逆に解けることを要求しましょう。これは、以下の関係式

$$\delta p_k = \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_\ell}\delta \dot{q}_\ell = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\ell}\delta \dot{q}_\ell \tag{1.25}$$

に注意すれば線形方程式の一般論から

$$\det \boldsymbol{W}(q, \dot{q}, t) \neq 0, (\boldsymbol{W})_{k\ell} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_\ell} \tag{1.26}$$

であれば十分であることとなります。以下しばらくこの条件が成立する場合のみを考えることとします。逆に $\det \boldsymbol{W} = 0$ の時には $\{p_k\}$ が全て独立ではないことを意味しますので、この場合、陰に束縛条件が存在する拘束系であることとなります。これに関しては後ほどまた考察したいと思います。

この運動量を用いて次のハミルトン関数 (ハミルトニアン) を定義しましょう。

$$H = p\dot{q} - L = p_k \dot{q}^k - L \tag{1.27}$$

この $q, \dot{q}$ を微小変化させた際のハミルトニアンの微小変化は次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
\delta H &= \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q \\
&= \dot{q}\delta p + \left(p - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta \dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q \\
&= \dot{q}\delta p - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q
\end{aligned}$$

ここで最後に $p$ の定義を使いました。これは一般にハミルトニアンは $H = H(q, p, t)$ と $q, p$ の関数で $\dot{q}$ には依存しないことを示します。この議論においては $\dot{q}$ が $p$ について解けることを仮定していませんから拘束系においても成り立つことには注意しましょう。なおここでの $\dot{q} \to p$ の変換はルジャンドル変換とよばれ、ここでの議論のとおり独立変数を入れ替える変換となります。

ルジャンドル変換

$x$ の関数 $f(x)$ により $x$ と $y$ との間に関数関係 $y=f(x)$ があるとき、独立変数として $p=f'(x)$ を考え、$g=xp-f(x)$ としましょう。すると $x$ の微小変化 $\delta x$ にともなって $p$ が $\delta p$ だけ変化し、$g$ が $\delta g$ 変化したとしましょう。すると以下の関係が成り立ちます。

$$\delta g = x\delta p + p\delta x - f'd = x\delta p + (p-f')\delta x = x\delta p$$

ここで $p=f'$ を使いました。これはこの $g$ が $x$ に依存せず、$p$ のみの関数となることを意味しており、さらに $\frac{dg}{dp}=x$ となることもこれからわかります。このようにして $f(x)$ から構成した $p$ の関数 $g(p)$ を $f(x)$ のルジャンドル変換と呼びます。この変換は熱力学関数の議論等でも多用されます。

ルジャンドル変換

$$\begin{aligned} y=f(x) \Leftrightarrow & g \equiv xp - f(x) = g(p) \\ & \frac{dg}{dp} = x \end{aligned}$$

もとの議論に戻って、ハミルトニアンの微小変化の関係式から (添え字を適宜省略して)

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q} \tag{1.29}$$

が一般に導かれます。一方、オイラーラグランジュ方程式は次の関係を導きますから

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{p}$$

結局 (1.29) は次の関係式となります。

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \tag{1.30}$$

以上あわせて運動方程式からつぎの正準方程式が導かれます。

ハミルトニアンと正準方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{q}^k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\
\dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q^k} \\
H &= p_k \dot{q}^k - L
\end{aligned}
$$

なおこの手続きは逆にたどれますので、正準方程式はニュートン方程式と同値な方程式となります。また $q = q(t),\ \{q^k(t)\}$ が世界線を定義したことに対応して $(q,p)$ の組は位相空間の一点を表し、古典的運動はこの位相空間中の曲線により指定されます。この $(q,p)$ 　のペア、$(q^k, p_k),\ k = 1, 2, \cdots$ をお互いに共役な正準変数とよびます。

　次に、正準形式における作用積分を $p_k(t), q^k(t)$ に関する拡張された汎関数として次のように定義しましょう。

$$
S[q(t), p(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( p_k \dot{q}^k - H(p, q, t) \right) \tag{1.31}
$$

この汎関数の変分は次のように評価できますから

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) \\
&= p \delta q \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right) = 0 \\
&\Updownarrow \\
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}
\end{aligned}
$$

以下の形の拡張された最小作用の原理から上述の正準方程式が導かれることとなります。

拡張された最小作用の原理

古典的運動は正準変数の組 $(q^k(t), p_k(t)), k = 1, \cdots, 2f$ の汎関数として拡張された作用積分 $S[q,p]$ を停留とする条件 $\delta S = 0$ から定まる。ただし境界条件は $\delta q^k = 0$ とする。

なおここでの最小性は関数 $q^k(t)$ のみでなく $p_k(t)$ に関しても最小とするわけで、前節の最小性よりより広い範囲での（より一般的な）最小性を要求することとなっています。

### 1.5.2 正準変数とポアソン括弧

ここで正準変数の組 $(q^k, p_k)$ とその正準変数の関数 $u, v$ に対して ポアッソン括弧 を次のように定義しましょう。

$$\{u, v\} \equiv \frac{\partial u}{\partial q^k}\frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q^k} \tag{1.32}$$

これは次の簡約化された記法を導入すれば

$$x_i^1 = q^i,\ x_i^2 = p_i \tag{1.33}$$

$$x_i^\alpha = \begin{cases} q^i & \alpha = 1 \\ p_i & \alpha = 2 \end{cases} \tag{1.34}$$

次のように書けます。

$$\{u, v\} = \epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_i^\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_i^\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\frac{\partial v}{\partial x^\beta}$$

ここで $\epsilon_{\alpha\beta}$ は 2 階の完全反対称テンソルとよばれ

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha, \beta) = (1, 2) \\ -1 & (\alpha, \beta) = (2, 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定義されます。最も基本的なポアソン括弧式は次のような正準変数同士のものです。

$$\{q^i, q^j\} = 0,\ \{p_i, p_j\} = 0,\ \{q^i, p_j\} = \delta^i_j$$

この基本関係式は上記の記法では簡潔に次のように書けます。

$$\{x_i^\alpha, x_j^\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

このポアソン括弧を用いれば任意の物理量 $O$ の時間発展は $O(p, q, t)$ が正準変数と時間 $t$ の関数であることを用いれば次のようになります。

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dt} &= \frac{\partial O}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial O}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial O}{\partial t} \\ &= \frac{\partial O}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial O}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial O}{\partial t} \\ &= \{O, H\} + \frac{\partial O}{\partial t} \end{aligned}$$

任意の物理量の運動方程式

$$\frac{dO}{dt} = \{O, H\} + \frac{\partial O}{\partial t}$$

ここでポアッソン括弧は自明な反対称性の他に次の ヤコビの恒等式 と呼ばれる重要な性質を満たします。[4]

Jacobi の恒等式

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0$$

もし時間に明示的に依存しない（$\frac{\partial O}{\partial t} = 0$）であるある物理量 $A$ とハミルトニアン $H$ とのポアソン括弧がゼロであれは $A$ は時間変化しません。つまり 運動の定数 となります。

運動の定数

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \ \& \ \{A, H\} = 0 \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} = 0, \quad A: \text{運動の定数}$$

これとヤコビの関係式から $A$, $B$ がともに運動の定数であれば次のように $\{A, B\}$ も運動の定数となります。

$$\{\{A, B\}, H\} = -\{\{B, H\}, A\} - \{\{H, A\}, B\} = 0$$

これを ポアソンの定理 と呼びます。しかし、この関係からいくつでも運動の定数が得られるわけではなく、途中からは自明な関係となります。

またよく使われる関係式として次のものを挙げておきましょう。[5]

$$\{ab, c\} = \{a, c\}b + a\{b, c\} \tag{1.35}$$

## 1.6 具体的な物理系のハミルトン形式による記述

### 1.6.1 相互作用する質点系

座標 $\boldsymbol{r}_i$ にある質量 $m_i$ の質点系のラグランジュ関数は 2 体力の相互作用ポテンシャルを $V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ として

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i{}^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j,(i\neq j)} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j), \quad V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = V(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i), (i \neq j)$$

であるから運動量は次のようになる

$$\boldsymbol{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H = \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{p}_i - L &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \\ &= \sum_i \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \end{aligned}$$

このとき全運動量 $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$$

とすれば

$$\begin{aligned} \{P_\alpha, H\} &= \frac{1}{2} \sum_i (-) \frac{\partial P_\alpha}{\partial (p_i)_\alpha} \frac{\partial H}{\partial (r_i)_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (-) \frac{\partial}{\partial (r_i)_\alpha} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \\ &= (-) \sum_{i<j} \left( \frac{\partial}{\partial (r_i)_\alpha} + \frac{\partial}{\partial (r_j)_\alpha} \right) V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) = 0 \end{aligned}$$

これより

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0$$

すなわち全運動量は保存する。

### 1.6.2 電磁場中の荷電粒子

前述のようにラグランジュ関数は $L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi + e\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2} m \dot{r}_\alpha \dot{r}_\alpha - e\phi + e\dot{r}_\alpha A_\alpha$ となりますから $r_\alpha$ の共役運動量を $p_\alpha$ として

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_\alpha} = m\dot{r}_\alpha + eA_\alpha \tag{1.36}$$

となる。これは質点の速度は運動量で次のようにかけることを意味します。

$$\dot{r}_\alpha = \frac{p_\alpha - eA_\alpha}{m}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}}{m}$$

これよりハミルトニアンは

$$H = p_\alpha \dot{r}_\alpha - L = \frac{1}{2} m \dot{r}_\alpha \dot{r}_\alpha + e\phi \tag{1.37}$$

$$= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\phi \tag{1.38}$$

となる。ここで正準方程式からニュートン方程式が導かれることを確認してみよう。まず

$$\dot{r}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{m}(p_\alpha - eA_\alpha)$$

これを更に時間微分して

$$\ddot{r}_\alpha = \frac{1}{m}(\dot{p}_\alpha - e\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - e\dot{r}_\beta \partial_\beta A_\alpha)$$

これに次のもう一つの正準方程式を用いて

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial r_\alpha} = -\frac{1}{m}(p_\beta - eA_\beta)\partial_\alpha A_\beta - e\partial_\alpha \phi = \dot{r}_\beta \partial_\alpha A_\beta - e\partial_\alpha \phi$$

$$m\ddot{r}_\alpha = e\left( -\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \partial_\alpha \phi + \dot{r}_\beta \partial_\alpha A_\beta - \dot{r}_\beta \partial_\beta A_\alpha \right)$$

これは前述のようにローレンツ力によるニュートン方程式をポテンシャルで書き直した (1.16) そのものです。

**電磁場中の荷電粒子のハミルトニアン**

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\phi$$
$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})/m$$

このとき速度 $\boldsymbol{v}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ のみでは定まらず上記のように一般にはベクトルポテンシャルに依存することに注意しましょう。

### ゲージ変換

ここでハミルトン形式でのゲージ変換について考えてみましょう。つまり、ポテンシャル $\phi$, $\boldsymbol{A}$ の代わりに $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ を考えるわけです。前述

のようにラグランジュ関数も $L' = L + e(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t})$ に変化しますから、正準運動量も次のように $\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{p}'$ に変化することとなります。

$$\boldsymbol{p}' = \frac{\partial L'}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{\nabla}\chi \tag{1.39}$$

対応して' 系でのハミルトニアンは $L'$ をルジャンドル変換して

$$\begin{aligned}
H' &= \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}' - L' = \dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{\nabla}\chi) - \big(L + e(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi + \frac{\partial\chi}{\partial t})\big)\\
&= H - e\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\phi - e\frac{\partial\chi}{\partial t}\\
&= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}' - e\boldsymbol{A}')^2 + e\phi'
\end{aligned}$$

と' なしの系と同型となります。これより' 系でもローレンツ力による Newton の運動方程式が導かれることがわかります。これはゲージ不変な電場、磁場で記述されるローレンツ力による運動はゲージ変換に当然依存しないことと整合的です。また $'$-系での正準方程式から

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H'}{\partial\boldsymbol{p}'} = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p}' - e\boldsymbol{A}') = \frac{1}{m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})$$

となります。これは正準運動量はゲージ依存量であるのに対して、質点の速度はゲージに依存しない物理量であることを示しています。

**一様磁場下での運動**

電場がなく $z$ 方向の一様磁場 $B$ の下で $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ にある質点の運動を少し詳しく考えてみましょう。まず、特定のゲージとしてつぎのランダウゲージをとり、議論を進めましょう。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (0, -Bx, 0)\\
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} &= (0, 0, B)
\end{aligned}$$

この時ハミルトニアンは次のようになります。

$$H = \frac{1}{2m}\big(p_x^2 + (p_y + eBx)^2 + p_z^2\big)$$

正準変数は $x, y, z$ と それに共役な $p_x, p_y, p_z$ で、ゼロにならないポアソン括弧はつぎのもののみとなります。

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \{z, p_z\} = 1 \tag{1.40}$$

よって明らかに

$$\{p_y, H\} = \{p_z, H\} = 0$$

となり $p_y$, $p_z$ は運動の定数となります。まず

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

から $z = v_z t + z_0$ $(p_z = m v_z)$ と $z$ 方向には等速度運動します。続いて

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{eB}{m}(p_y + eBx) = -m\omega(v_y + \omega x) \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y + eBx}{m} = v_y + \omega x
\end{aligned}$$

ここで $\omega = \frac{eB}{m}$ としました。これを サイクロトロン周波数 とよびます。これから

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\omega(v_y + \omega x) = -\omega^2(x + \frac{v_y}{\omega}) \\
x + \frac{v_y}{\omega} &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\
y &= -A\cos\omega t + B\sin\omega t + y_0
\end{aligned}$$

まとめて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1 \sin\omega t + \boldsymbol{e}_2 \cos\omega t + \boldsymbol{r}_0$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$$

これは $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2|$, $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$ より、質点は $x - y$ 平面内では等速円運動をしながら、$z$ 方向に等速運動をすることを意味します。

# 第2章　対称性と保存則

対称性と変換理論について、ここで詳しく議論してみましょう。

## 2.1　循環座標と保存則

古典的な運動を定めるオイラーラグランジュ方程式はある一般化座標 $q^k(t)$ により記述されていますが、運動の記述は座標系により全く異なって見えますから、座標の取り方が重要なことはよく知られています。ここではより一般に一般化座標の変数変換として次の 点変換 と呼ばれるものを考えてみましょう。

$$q^k = q^k(Q^1, \cdots, Q^F),\ k = 1, \cdots, f \tag{2.1}$$

ラグランジュ関数 $L$ はその関数形に注意して

$$L(q, \dot{q}) = L(q(Q), \dot{q}(Q)) = \tilde{L}(Q, \dot{Q})$$

と書きましょう。この時 $S[q] = S[q(Q)] = \tilde{S}[Q]$ として

$$\delta S[q(Q)] = \delta\tilde{S}[Q] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{\delta\tilde{S}}{\delta Q^K}\delta Q^K(t)$$

となりますから新しい変数 $Q^K$ についても次のオイラー・ラグランジュ方程式が成立することとなります。

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta Q^K} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial Q^K} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{Q}^K} = 0$$

ここで新しい変数 $Q^K$ の個数は必ずしも $f$ に等しくなく $F > f$ でもよいことに注意しましょう。これは具体的な計算によっても以下のように確認できます。まず

$$\dot{q}^k = \frac{\partial q^k}{\partial Q^K}\dot{Q}^K$$
$$\frac{\partial\dot{q}^k}{\partial\dot{Q}^K} = \frac{\partial q^k}{\partial Q^K}$$

に注意して

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q^K} = \frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial Q^K}$$
$$= \frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^L \partial Q^K}\dot{Q}^L$$

また

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^K} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{Q}^K} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial q^k}{\partial Q^K}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}^K} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\frac{\partial q^k}{\partial Q^K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial q^k}{\partial Q^K}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\frac{\partial q^k}{\partial Q^K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^K Q_L}\dot{Q}_L$$

これから

$$\frac{\delta S}{\delta Q_K} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_K} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_K} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{\partial q_k}{\partial Q_K}$$
$$= \frac{\delta S}{\delta q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_K}$$

となり、$\frac{\delta S}{\delta q_k} = 0$ から $\frac{\delta S}{\delta Q_K} = 0$ が従うこととなります。

特にラグランジュ関数がある一般化座標 $q_i$ を含まないとき

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

となりますので

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.} \tag{2.2}$$

と運動の定数が導かれます。このような一般化座標を循環座標とよびます。

例えば２体力により相互作用している $N$ 個の質点系を考えますと

$$L = \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + \sum_{i<j} V(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$$

となりますので $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}$ として

$$(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = (\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{R}), \cdots, \boldsymbol{r}_N(\boldsymbol{R}_1, \cdots, \boldsymbol{R}_N, \boldsymbol{R}))$$

と１つ独立な一般化座標を増やす変換を考えてみましょう。ここで $\dot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{R}}_i + \dot{\boldsymbol{R}}$ ですから

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\boldsymbol{R}}_i + \dot{\boldsymbol{R}})^2 + \sum_{i<j} V(\boldsymbol{R}_i - \boldsymbol{R}_j)$$

と $L$ は $\boldsymbol{R}$ を含みません。よって

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \sum_i m_i (\dot{\boldsymbol{R}}_i + \dot{\boldsymbol{R}}) = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

は保存量となります。なおこれは物理的には重心の運動量の保存則、もしくは全運動量の保存則に対応します。

## 2.2 ネーターの定理

### 2.2.1 ネーターの定理 (独立変数に依存しない変換の場合)

物理系が持つ保存則は偶然に生じるわけではなく、何らかの物理的起源があるのが一般的です。ここではラグランジュ関数がある対称操作で不変なとき、対応して保存する物理量の存在を導く一般的な定理である ネーターの定理 について説明し、質点の力学系に対してそのいくつかの帰結を考察してみましょう。

一般化座標 $q(t) = \{q_i(t)\}$ ならびにラグランジュ関数 $L(q, \dot{q}, t)$ により系の運動が記述されているとしましょう。ここでこの系が異なる一般化座標 $q'(t) = \{q'_i(t)\}$ ならびにラグランジュ関数 $L'(q', \dot{q}', t)$ によっても同様に記述されるとしましょう。つまり作用積分が次のように２通りに書けることとなります。

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q, \dot{q}, t) = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L'(q', \dot{q}', t)$$

このとき、つぎのようにラグランジュ関数の形が $L$ と $L'$ とで変わらないとき

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q', \dot{q}', t)$$

ラグランジュ関数は $q \to q'$ の変換で不変であるといいます。特にこの変換が連続的で

$$q' = q + \delta q$$

とかけ $\delta q$ について十分小さいと見なせるとき、その最低次のみを考えましょう。これを無限小変換とよびます。このときつぎの変形より、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(L'(q',\dot{q}',t)-L(q,\dot{q},t)\right)\\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(L(q',\dot{q}',t)-L(q,\dot{q},t)\right)\\
&= \int_{t_i}^{t_f} dt\,\delta L\\
\delta L &= L(q',\dot{q}',t)-L(q,\dot{q},t)
\end{aligned}
$$

ここで積分領域は任意なので

$$
\begin{aligned}
\delta L &= L(\delta q,\dot{\delta} q,t)=0\\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}
\end{aligned}
$$

となりますが、ここで運動方程式 $\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$ をもちいれば

$$
\begin{aligned}
0 &= (\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)
\end{aligned}
$$

となり、これは

$$
\begin{aligned}
G &= \text{const.}\\
G &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q
\end{aligned}
$$

となること、すなわち $G$ が運動の定数であることを意味します。これはネーターの定理と呼ばれる結果の一部です。

ネーターの定理（独立変数によらない変換）

$$
\delta L=0,\ (q_i\to q_i+\delta q_i)\leftrightarrows G=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\delta q_i=\ \text{const.}
$$

以下幾つかの例を考えてみましょう。

### 2.2.2 循環座標とネーターの定理

$q$ が循環座標である場合、ラグランジュ関数が $q$ を含みませんから

$$
\begin{aligned}
q' &= q + \epsilon, \\
\delta q &= \epsilon
\end{aligned}
$$

に対して

$$L(q, \dot{q}) = L(q' - \epsilon, \dot{q}') \equiv L'(q', \dot{q}') = L(q', \dot{q}')$$

ですから

$$L'(q', \dot{q}') = L(q', \dot{q}')$$

とラグランジュ関数はこの変換で不変となります。これから次のように保存量が導かれることとなります。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\epsilon = 0$$

### 2.2.3 空間の一様性と運動量保存

まず対称操作として空間並進と呼ばれる次のものを考えてみましょう。

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{n}$$

ここで $\boldsymbol{n}$ はある定数ベクトルです。対応する無限小変換は

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{r} &= \epsilon \boldsymbol{n} \\
\delta \dot{\boldsymbol{r}} &= 0
\end{aligned}
$$

となります。($\epsilon$ で無限小であることを示します。) この変換に対してラグランジュ関数は次のように変化します。

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = L(\boldsymbol{r}' - \epsilon \boldsymbol{n}, \dot{\boldsymbol{r}'}, t) \equiv L'(\boldsymbol{r}', \dot{\boldsymbol{r}'})$$

これが不変であることは次のように表せます。

$$L'(\boldsymbol{r}', \dot{\boldsymbol{r}'}) = L(\boldsymbol{r}', \dot{\boldsymbol{r}'})$$

例えば、次の自由粒子のラグランジュ関数はこの条件をみたします。

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2$$

これはラグランジュ関数が座標の原点の $\boldsymbol{n}$ 方向の平行移動に関して不変であることを意味します。譬えると、東京とニューヨークで物理法則が不変であることを意味するわけです。この性質は空間の一様性と呼ばれます。この時一般論から

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \cdot \boldsymbol{n} = \text{const.}$$

となりますが、左辺は $\boldsymbol{r}$ に共役な運動量の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分を表しますから

**空間の一様性**

空間の一様性は運動量保存則を導く

こととなります。

### 2.2.4 方向の一様性と角運動量保存

今度は質点 (系) のラグランジュ関数が座標の回転操作に対して不変であることを要求してみましょう。つまり質点の座標を $\boldsymbol{r}$ として回転した座標系で同じ質点の座標が $\boldsymbol{r}'$ と書けたとしましょう。回転操作は長さを保存する線形変換ですのでその変換行列を $\boldsymbol{\Omega}$ と書いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{r} \\ |\boldsymbol{r}'|^2 &= \widetilde{\boldsymbol{r}'} \boldsymbol{r}' = \widetilde{\boldsymbol{r}} \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|^2 = \widetilde{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{r} \end{aligned}$$

ですから、$\boldsymbol{\Omega}$ は直交行列

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{I}_3$$

であることとなります。($\widetilde{\ }$ は転置を表します。) よって無限小変換として

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{I}_3 + \delta \boldsymbol{\Omega}$$

とすれば、直交性の条件から (最低次を比べて)

$$\delta \boldsymbol{\Omega} + \widetilde{\delta \boldsymbol{\Omega}} = 0$$

と $\delta\mathbf{\Omega}$ が反対称行列であることを意味します。そこでこれを $\boldsymbol{n}$ をあるベクトルとして、次のように書きましょう。

$$
\begin{aligned}
(\delta\mathbf{\Omega})_{ij} &= \epsilon\epsilon_{ijk}n_k \\
\delta r_i = (\delta\mathbf{\Omega})_{ij}r_j &= \epsilon\epsilon_{ijk}r_j n_k
\end{aligned}
$$

よって一般論から

$$
\begin{aligned}
G &= \epsilon\epsilon_{ijk}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}r_j n_k \\
&= \epsilon\epsilon_{ijk}p_i r_j n_k \\
&= -\epsilon\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L} \\
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}
\end{aligned}
$$

が保存量となります。ここで $\boldsymbol{p}$ は運動量, $\boldsymbol{L}$ は角運動量を表しますので、これは $\boldsymbol{n}$ 方向の角運動量が保存することを意味します。これをまとめましょう。

**空間方向の一様性**

空間方向の一様性は角運動量保存則を導く

### 2.2.5 ネーターの定理（一般の場合）

前と同様に系の運動が一般化座標 $q(t)$, ラグランジュ関数 $L'(q,\dot{q},t)$ で記述される一方異なる一般化座標 $q'(t')$, ラグランジュ関数 $L'(q',\dot{q}',t')$ にても記述されるとしましょう。ここでは前の状況よりより一般的に独立変数と考えてきた $t$ の代わりに $t'$ にて新しい記述が行われることを許してみましょう。これを変換とみて

$$
\begin{aligned}
t &\to t' \\
q(t) &\to q'(t') \\
L(q,\dot{q},t) &\to L'(q',\dot{q}',t')
\end{aligned}
$$

と書きましょう。また新しい時間（めもり）$t'$ では $t_i$, $t_f$ は $t'_i$, $t'_f$ と表されるとしましょう。この時、系の作用積分は異なる 2 通りの記述の仕方で書けるので次のような関係が成立します。

$$
\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(q(t),\dot{q}(t),t) = \int_{t'_i}^{t'_f} dt'\, L'(q'(t'),\dot{q}'(t'),t') = \int_{t'_i}^{t'_f} dt\, L'(q'(t),\dot{q}'(t),t) \quad (2.3)
$$

最後の関係は単に積分変数の取り直しです。ここで、前節のようにラグランジュ関数はこの変換で（その関数形が）不変であることを要求しましょう。つまり

$$L(q,\dot{q},t) \to L'(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t')$$

とするわけです。さらにこの変換が無限小であるとすると (2.3) は微小量の最低次で次のように変形できます。

$$\begin{aligned} 0 &= \delta t_f L\Big|_{t=t_f} - \delta t_i L\Big|_{t=t_i} + \int_{t_i}^{t_f} dt\, \delta L(q,\dot{q},t) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \frac{d}{dt}(\delta t L) + \delta L(q,\dot{q},t) \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \delta L &= L'(q'(t),\dot{q}'(t),t) - L(q(t),\dot{q}(t),t) \\ &= L(q'(t),\dot{q}'(t),t) - L(q(t),\dot{q}(t),t) \end{aligned}$$

です。ここで一般化座標の微小変化に関するラグランジュ関数の変化をつぎのように評価しましょう。

$$\begin{aligned} \delta L &= L(q',\dot{q}',t) - L(q,\dot{q},t) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \end{aligned}$$

これに運動方程式をつかって

$$\begin{aligned} \delta L &= \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \\ &= \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right) \end{aligned}$$

となりますので、以上併せて

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + \delta t L \right) = 0$$

ここで積分区間は任意ですので、次の関係式が得られます。

ネーターの定理

$$L'(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t') \leftrightarrows \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q + L\delta t = \text{const.}$$

### 2.2.6 時間推進とエネルギーの保存

独立変数に依存する対称性の例として、時間推進

$$
\begin{aligned}
t = t' &= t + \epsilon \\
q'(t') &= q(t)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

を考えてみましょう。これより無限小変換は、まず、時間に対して

$$
\delta t = t' - t = \epsilon
$$

次に一般化座標に対しては (2.4) を展開して

$$
\begin{aligned}
q'(t) + \delta t \dot{q}'(t) &= q(t) \\
\delta q = q'(t) - q(t) &= -\delta t \dot{q} = -\epsilon \dot{q}
\end{aligned}
$$

となります。ここで、ラグランジュ関数が時間に明示的に依存しないときを考えると、系を記述するラグランジュ関数は時間の原点に依存しませんので

$$
L'(q', \dot{q}') = L(q, \dot{q})
$$

となりますよって

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(-\delta) t \dot{q} + L \delta t = -\delta t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right)
$$

が保存することとなります。これは $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ が運動量であることを思い出すとハミルトニアン $-H$ が保存することを意味します。

**時間の一様性**

時間の一様性はエネルギー保存則を導く

こととなります。つまり、時代が変わっても物理法則が不変であることからエネルギー保存則が導かれることとなります。

by Y. Hatsugai, 2007

# 第3章　変換理論

この節では正準形式での変換理論について学びましょう。

## 3.1　正準変換

正準方程式は $q(t), p(t)$ の汎関数として次の変分原理から導かれることに注意しましょう。[6]

$$
\begin{aligned}
\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \left( p\dot{q} - H(q,p) \right) &= 0 \\
\delta q(t_i) = \delta q(t_f) &= 0
\end{aligned}
$$

よって変数変換

$$
\begin{aligned}
(q,p) &\to (\bar{q},\bar{p}) \\
H(q,p) &\to \bar{H}(\bar{q},\bar{p})
\end{aligned}
$$

を考えたとき

$$
\delta \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{H}(\bar{q},\bar{p}) \right) = 0
$$

が導かれれば正準方程式は

$$
\dot{\bar{q}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}},\ \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}}
$$

と同型となります。

この条件が成立するためにはつぎの条件が十分です。[7]

$$
\begin{aligned}
p\dot{q} - H = \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{H} + \frac{dW}{dt} \\
pdq - \bar{p}d\bar{q} - (H - \bar{H})dt = dW \\
\delta \bar{q}(t_f) = \delta \bar{q}(t_i) = 0
\end{aligned}
$$

ここで $W$ は $W=W(q,\bar{q},t)$ と $q,\bar{q}$ の関数としてみましょう。
　すると、このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} =& \frac{\partial W}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial W}{\partial \bar{q}}\dot{\bar{q}}+\frac{\partial W}{\partial t} \\
p\dot{q}-H =& \bar{p}\dot{\bar{q}}-\bar{H}+\frac{\partial W}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial W}{\partial \bar{q}}\dot{\bar{q}}+\frac{\partial W}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となりますから、任意関数である $\dot{q},\,\dot{\bar{q}}$ の係数を比べて

$$
p =\frac{\partial W}{\partial q},\ \bar{p}=-\frac{\partial W}{\partial \bar{q}},\ H=\bar{H}-\frac{\partial W}{\partial t}
$$

となります。
　次に

$$
W' =W(q,\bar{q},t)+\bar{q}\bar{p}
$$

とすれば ($\bar{q}\to\bar{p}$ のルジャンドル変換)

$$
\begin{aligned}
dW' =& dW+d\bar{q}\bar{p}+\bar{q}d\bar{p} \\
=& \frac{\partial W}{\partial q}dq+\frac{\partial W}{\partial \bar{q}}d\bar{q}+\frac{\partial W}{\partial t}dt+\bar{p}d\bar{q}+\bar{q}d\bar{p} \\
=& \frac{\partial W}{\partial q}dq+\frac{\partial W}{\partial t}dt+\bar{q}d\bar{p}
\end{aligned}
$$

つまり $W'$ は $q,\bar{p},t$ の関数とみなせます。

$$
W' =W'(q,\bar{p},t)
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= \frac{dW'}{dt}-\dot{\bar{q}}\bar{p}-\dot{\bar{p}}\bar{q} \\
&= \frac{\partial W'}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial W'}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}}+\frac{\partial W'}{\partial t}-\dot{\bar{q}}\bar{p}-\dot{\bar{p}}\bar{q}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
p\dot{q}-H =& \bar{p}\dot{\bar{q}}-\bar{H}+\frac{\partial W'}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial W'}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}}+\frac{\partial W'}{\partial t}-\dot{\bar{q}}\bar{p}-\dot{\bar{p}}\bar{q} \\
=& -\bar{H}+\frac{\partial W'}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial W'}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}}+\frac{\partial W'}{\partial t}-\dot{\bar{p}}\bar{q} \\
(p-\frac{\partial W'}{\partial q})\dot{q} =& (\frac{\partial W'}{\partial \bar{p}}-\bar{q})\dot{\bar{p}}+H-\bar{H}+\frac{\partial W'}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となり、$\dot{q}, \dot{\bar{p}}$ は独立な関数であることを使えば

$$
\begin{aligned}
p =& \frac{\partial W'}{\partial q} \\
\bar{q} =& \frac{\partial W'}{\partial \bar{p}} \\
H =& \bar{H} - \frac{\partial W'}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となります。これにより新旧の正準変数の間の関係が与えられることとなります。
　次に

$$
W'' = W(q, \bar{q}, t) - qp
$$

としてみましょう。これは $q \to p$ のルジャンドル変換です。すると

$$
\begin{aligned}
dW'' =& dW - dqp - qdp \\
=& \frac{\partial W}{\partial q} dq + \frac{\partial W}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial W}{\partial t} dt - pdq - qdp \\
=& \frac{\partial W}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial W}{\partial t} dt - qdp
\end{aligned}
$$

が成立し、$W''$ は $\bar{q}, p, t$ の関数とみなせます。

$$
W'' = W''(\bar{q}, p, t)
$$

さらにこのとき

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} =& \frac{dW''}{dt} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
=& \frac{\partial W''}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial W''}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial W''}{\partial t} + q\dot{p} + p\dot{q}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
p\dot{q} - H =& \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{H} + \frac{\partial W''}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} + \frac{\partial W''}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial W''}{\partial t} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
\bar{H} - H - \frac{\partial W''}{\partial t} =& (\bar{p} + \frac{\partial W''}{\partial \bar{q}}) \dot{\bar{q}} + (\frac{\partial W''}{\partial p} + q) \dot{p}
\end{aligned}
$$

$\dot{\bar{q}}, \dot{p}$ は独立な関数だから

$$
\begin{aligned}
\bar{p} =& -\frac{\partial W''}{\partial \bar{q}} \\
q =& -\frac{\partial W''}{\partial p} \\
H =& \bar{H} - \frac{\partial W''}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となります。これも正準変換です。
　ひきつづいて

$$W''' = W''(\bar{q}, p, t) + \bar{p}\bar{q}$$

とすれば ($p \to \bar{p}$ のルジャンドル変換)

$$\begin{aligned}
dW''' =& dW'' + \bar{p}d\bar{q} + \bar{q}d\bar{p} \\
=& \frac{\partial W''}{\partial \bar{q}}d\bar{q} + \frac{\partial W''}{\partial p}dp + \frac{\partial W''}{\partial t}dt + \bar{p}d\bar{q} + \bar{q}d\bar{p} \\
=& \frac{\partial W''}{\partial p}dp + \frac{\partial W''}{\partial t}dt + \bar{q}d\bar{p}
\end{aligned}$$

つまり $W'''$ は $\bar{p}, p, t$ の関数とみなせることとなります。。

$$W''' = W'''(p, \bar{p}, t)$$

このとき

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} =& \frac{dW''}{dt} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
=& \frac{dW'''}{dt} - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{q}\dot{\bar{p}} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
=& \frac{\partial W'''}{\partial t} + \frac{\partial W'''}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}} - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{q}\dot{\bar{p}} + q\dot{p} + p\dot{q}
\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}
p\dot{q} - H =& \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{H} + \frac{\partial W'''}{\partial t} + \frac{\partial W'''}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}} - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{q}\dot{\bar{p}} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
=& \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{H} + \frac{\partial W'''}{\partial t} + \frac{\partial W'''}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}} - \bar{p}\dot{\bar{q}} - \bar{q}\dot{\bar{p}} + q\dot{p} + p\dot{q} \\
-H =& -\bar{H} + \frac{\partial W'''}{\partial t} + \frac{\partial W'''}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}}\dot{\bar{p}} - \bar{q}\dot{\bar{p}} + q\dot{p} \\
=& -\bar{H} + \frac{\partial W'''}{\partial t} + (\frac{\partial W'''}{\partial p} + q)\dot{p} + (\frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}} - \bar{q})\dot{\bar{p}}
\end{aligned}$$

ここで $\dot{\bar{p}}, \dot{p}$ は独立な関数だから

$$\begin{aligned}
q =& -\frac{\partial W'''}{\partial p} \\
\bar{q} =& \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}} \\
H =& \bar{H} - \frac{\partial W'''}{\partial t}
\end{aligned}$$

となります。

以上の考察を一覧にまとめてみましょう。

正準変換

$$pdq - \bar{p}d\bar{q} - (H - \bar{H})dt = dW$$

特に $W$ が時間に依存しないとき ( $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ )

$$\bar{H} = H$$
$$pdq - \bar{p}d\bar{q} = dW$$

- $W = W(q, \bar{q})$ として

$$p = \frac{\partial W}{\partial q},\ \bar{p} = -\frac{\partial W}{\partial \bar{q}},\ \bar{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t}$$

- $W' = W'(q, \bar{p}) = W + \bar{q}\bar{p}$ として

$$p = \frac{\partial W'}{\partial q},\ \bar{q} = \frac{\partial W'}{\partial \bar{p}},\ \bar{H} = H + \frac{\partial W'}{\partial t}$$

- $W'' = W''(\bar{q}, p) = W - qp$ として

$$\bar{p} = -\frac{\partial W''}{\partial \bar{q}},\ q = -\frac{\partial W''}{\partial p},\ \bar{H} = H + \frac{\partial W''}{\partial t}$$

- $W''' = W'''(\bar{p}, p) = W'' + \bar{q}\bar{p} = W + \bar{q}\bar{p} - qp$ として

$$q = -\frac{\partial W'''}{\partial p},\ \bar{q} = \frac{\partial W'''}{\partial \bar{p}},\ \bar{H} = H + \frac{\partial W'''}{\partial t}$$

### 3.1.1 リュウビルの定理

正準変数がつくる多変数の空間を 位相空間 と呼びますが、その体積要素 $dV_{q,p}$ は正準変換に対して、不変であることが次のような簡単な考察からわかります。まず、一般の正準変換 $(q, p) \to (\bar{q}, \bar{p})$ に対してこの体積要素の変換は次のようなヤ

コビアン $J$ によりあたえられることに注意しましょう

$$
\begin{aligned}
dV_{\bar{q}\bar{p}} &= J dV_{q,p} \\
J &= \frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(q,p)} = \det \boldsymbol{M} \\
\boldsymbol{M} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} & \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\bar{q} &= \frac{\partial \bar{q}}{\partial q} dq + \frac{\partial \bar{q}}{\partial p} dp \\
d\bar{p} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial q} dq + \frac{\partial \bar{p}}{\partial p} dp \\
\begin{pmatrix} d\bar{q} \\ d\bar{p} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} \\
d\bar{q} \wedge d\bar{p} &= d\bar{p} \wedge d\bar{q} \\
&= J dq \wedge dp
\end{aligned}
$$

8

$$
\frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(q,p)} = \frac{\frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(q,\bar{q})}}{\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,\bar{q})}} = (-)^f \frac{\frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(\bar{q},q)}}{\frac{\partial(q,p)}{\partial(q,\bar{q})}} = (-)^f \frac{\frac{\partial(\bar{p})}{\partial(q)}}{\frac{\partial(p)}{\partial(\bar{q})}}
$$

ここで　$(q,\bar{q})$ を独立とする正準変換の関係式よりヤコビアンの間の関係式として

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{p})}{\partial(q)} &= \frac{\partial}{\partial(q)}(-)\frac{\partial W}{\partial(\bar{q})} = (-)^f \frac{\partial^2 W}{\partial(q\bar{q})} \\
\frac{\partial(p)}{\partial(\bar{q})} &= \frac{\partial}{\partial(\bar{q})}\frac{\partial W}{\partial(q)} = \frac{\partial^2 W}{\partial(q\bar{q})}
\end{aligned}
$$

これから

$$
\frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(q,p)} = 1
$$

リウヴィルの定理

$$
\frac{\partial(\bar{q},\bar{p})}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(\bar{q}_1,\cdots \bar{q}_f,\bar{p},\cdots,\bar{p})}{\partial(q_1,\cdots q_f,p,\cdots,p)} = 1
$$

### 3.1.2 正準不変量

正準変換に対するポアソン括弧式の変換を考えよう。

ここで $x=(q,p)\to\bar{x}=(\bar{q},\bar{p}$ が正準変換であり変換の母関数 $W$ が時間によらないとすれば[9]

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta}(x^\alpha dx^\beta-\bar{x}^\alpha d\bar{x}^\beta)=&\epsilon_{\alpha\beta}(x_i^\alpha dx_i^\beta-\bar{x}_i^\alpha d\bar{x}_i^\beta)\\=&dV\end{aligned}$$

と書ける。ただし $V$ は $\bar{x}$ の関数とする。($x$ 依存性は正準変換の関係式をつかって $\bar{x}$ について解いたと考えよう) よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\bar{x}_j^\beta}=&\epsilon_{\eta\gamma}x_k^\eta\frac{\partial x_k^\gamma}{\partial\bar{x}_j^\beta}-\epsilon_{\eta\beta}\bar{x}_j^\eta\\\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{x}_i^\alpha\partial\bar{x}_j^\beta}=&\epsilon_{\eta\gamma}\frac{\partial x_k^\eta}{\partial\bar{x}_i^\alpha}\frac{\partial x_k^\gamma}{\partial\bar{x}_j^\beta}+\epsilon_{\eta\gamma}x_k^\eta\frac{\partial^2 x_k^\gamma}{\partial\bar{x}_i^\alpha\partial\bar{x}_j^\beta}-\epsilon_{\eta\beta}\delta_{ij}\delta_{\alpha\eta}\\=&[\![\bar{x}_i^\alpha,\bar{x}_j^\beta]\!]+\epsilon_{\eta\gamma}x_k^\eta\frac{\partial^2 x_k^\gamma}{\partial\bar{x}_i^\alpha\partial\bar{x}_j^\beta}-\epsilon_{\alpha\beta}\delta_{ij}\qquad(*)\end{aligned}$$

ここでラグランジュ括弧 $[\![u,v]\!]$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned}[\![u,v]\!]=&\frac{\partial q^i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v}-\frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q^i}{\partial v}\\=&\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial x_i^\alpha}{\partial u}\frac{\partial x_i^\beta}{\partial v}=-[\![v,u]\!]\end{aligned}$$

(*) でのさいごの関係式で $(i,\alpha)\rightleftarrows(j,\beta)$ として辺々引いて

$$[\![\bar{x}_i^\alpha,\bar{x}_j^\beta]\!]=\epsilon_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

ポアッソン括弧とラグランジュ括弧には次の関係があるので[10]

$$\{\bar{x}_i^\alpha,\bar{x}_k^\gamma\}[\![\bar{x}_j^\beta,\bar{x}_k^\gamma]\!]=\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

正準変換後の変数もまた

$$\{\bar{x}_i^\alpha,\bar{x}_j^\beta\}=\epsilon_{\alpha\beta}\delta_{ij}$$

を満たす。これよりポアッソン括弧は正準変換で不変つまりどの正準変数で計算してもよいことがしめせる。[11]

$$\overline{\{u,v\}}\equiv\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial\bar{x}_i^\alpha}\frac{\partial v}{\partial\bar{x}_i^\beta}=\{u,v\}$$

by Y. Hatsugai, 2007

# 第4章　相対論的力学

by Y. Hatsugai, 2007

# 第5章　古典場の理論

by Y. Hatsugai, 2007

# 第6章　拘束系の解析力学