

トポロジカル秩序と幾何学的位相
(旧：量子相における幾何学的位相)

平成23年9月5日版

初貝安弘

筑波大学大学院数理物質科学研究科物理学専攻

目次

1	量子液体とスピン液体	3
1.1	秩序変数	3
1.2	トポロジカル秩序	4
2	幾何学的位相とベリー接続	5
2.1	成功の歴史からトポロジカルな秩序変数へ	5
2.2	量子干渉効果としてのベリー接続	6
2.3	対称性に守られた量子化	9
2.4	シングレット秩序変数と分数化	10
3	バルクーエッジ対応	14

概要

物質の多様な相を理解することは物性物理学の重要な部分をなすが、ランダウの相の理論を持ち出すまでもなく、秩序の概念がその相分類においては本質的であった。一方1980年代の量子ホール効果の発見以来、秩序形成を伴わないが、特徴的で興味深い、いわゆる量子液体/スピン液体相と称される量子相がいくつも発見され、多くの興味を集めている。整数スピン鎖のいわゆるHaldane相、スピン系他のダイマー相、近年話題の磁場中のグラフェンや量子スピンホール相としてのトポロジカル絶縁体がこのクラスに属する。

我々は典型的な量子干渉効果であるベリー接続からチャーン数、量子化ベリー位相など断熱不変量となるトポロジカルな物理量を構成し、これらの量子相を具体的に記述する試みを行ってきた。一方、これらのトポロジカルな量子相はバルクには自明な特徴を持たないが、系に境界、不純物等が存在する時に、エッジ状態と呼ばれる典型的な局在状態を伴う。このバルクとエッジの相互関係を「バルク-エッジ対応」と述べるとき、その分類手段としての有効性も広く認識されつつある。

量子液体相は対称性の破れを伴わず、その特徴づけには通常の秩序変数による記述は使えない。そこで、新しい概念としてのトポロジカル秩序なるキーワードを持ち出すとき量子化する幾何学的位相ならびにバルクエッジ対応は一つの具体的な「トポロジカル秩序変数」を定義する試みとみなせる。

これらについてできるだけ平易な解説を試みたい。

1 量子液体とスピン液体

1.1 秩序変数

化学、生物学、工学等と物理学をあえて比較したとき、これらの科学が多様性 (diversity) としての種々の現象、物質相の固有の特性を何よりも大切にすることに対して、物理学は多数の現象、物質相にまたがり、各論を越えて共通に存在する普遍性 (Universality) をより大切にすると見えよう。例えば、物性物理学が対象とする物質の形態には極めて多様なものがあるが、それを物質の相として各論を越えて普遍的な観点から物理学の対象とするとき、「秩序」の概念とその作業変数としての秩序変数が基本的である。

物質の温度が十分に高ければ個々の粒子は他と無関係な熱運動する。この高温相から温度を徐々に下げると、粒子間の相互作用が支配的になり物質相固有の秩序が形成され、新しい低温相に転移する。この秩序をうまく理解できれば、この物質相の特徴が捉えられるわけである。電荷に着目したときそれがああるパターンをつくるのが電荷密度波状態であり、スピンに着目してそのパターンで特徴づけられる状態は磁気秩序状態というわけである。(図1参照)

秩序はその名の通り何かが整然と整列することを意味し巨視的な構造を意味する。秩序を特徴付ける局所的な量を秩序変数とし、その局所秩序変数が巨視的構造を記述することをもって長距離秩序とする。その際、秩序変数により記述される局所的な構造の乱れとしてのゆらぎが長距離化し、転移点で巨視的となることで臨界現象が特徴付けられる。またこれを対称性の観点から見直せば、高温相は特定の構造をもたないことに対応して対称相と呼ばれ、転移点以下では巨視的秩序の形成に伴ない局所秩序変数のすべての方向(値)

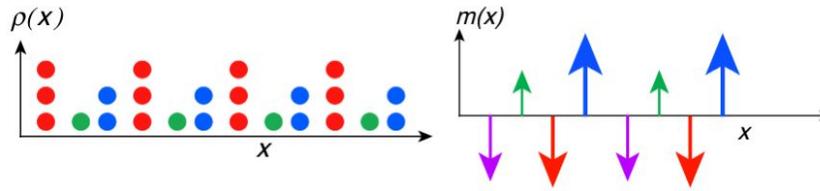


図 1: 古典的な秩序の例としての電荷密度波とスピン密度波。

が同等ではありえないこととなる。この低温相が系を記述する物理法則の持つ対称性をもたない場合、自発的に対称性が破れたと言われ、この対称性の破れにより低温相が特徴付けられる。これが秩序変数を用いた対称性の破れによる物質相の理解であり、物理学全般で重要な概念である。¹

1.2 トポロジカル秩序

この Landau-Ginzburg-Wilson による、あまりにも有名かつ極めて有効な相の理論ですべての物質相が理解できれば、それはそれで幸せであったが、1980 年代以降に歴史的な 2 つの例外が現れた。一つが 2 次元強磁場下の電子系で実現する量子ホール相 [1, 2] であり、もう一つは整数スピンを持つ 1 次元反強磁性体における Haldane 相である [3]。共に対称性の破れを伴わず、それでいて多くの研究者を引きつけるだけの興味深い物質相である。その共通の特徴として、励起に有限のエネルギーギャップをもち、量子効果が本質的に重要な量子相であり、その基底状態は局所的な物量を秩序変数とするどんな対称性も破らないと考えられている。よって、如何なる局所的な物理量の空間的な相関関数も指数関数的に減衰する。いかなる局所的な秩序をもたないとの意味でこれらの相は、量子液体相と呼ばれた。新しい量子相の登場である。² この量子ホール相の物理は大きく発展し、多数の量子ホール相があると皆が考えるに至ったが、秩序変数がないのだから、秩序変数に基づく通常の相分類の理論は使えない。

振り返れば、局所秩序変数による相分類が有効な場合量子系の基底状態が連続対称性を破るときには、有名な南部-ゴールドストーン (NG) ボゾンとしてのギャップレスの励起が存在する。系のハミルトニアンは連続対称操作に対応するすべての「方向」を等価に表現するにも関わらず、実現する系の基底状態は連続の自由度だけある無数の状態のただ一つを選んで実現するわけである。その連続の自由度はすべて同等の意義をもつから空間的にその対称性の破れの「方向」を少しずつ変化させた状態を考えればそれが基底状態に対する外乱となり励起状態を与えることとなる。ここで連続対称性に起因して、その空間的乱れの周期を大きく、すなわちゆっくりした基底状態の変形

¹よく知られたイジング模型の例をあげるまでもなく、非局所的な秩序が有効と考えられる場合も幾つもあるが、その多くは双対変換等により局所的な秩序変数に特徴付けられる他の系に写して議論されることが多い。少なくともゆらぎにより特徴付けられる臨界現象は短距離のゆらぎが長距離化し最終的に巨視的になる過程であるから秩序変数の局所性は本質的に重要である。

またここで Kostelitz-Thouless 転移として知られる束縛されたボルテックスの解離により特徴付けられる転移は独自の意義をもつことは注意しておく必要がある。

²歴史的には液体ヘリウムの量子効果を議論する際、量子液体との言葉が使われたが、ここでの意味は少々異なることに注意されたい。ただし、超流動相はここでの量子液体とも考えられる。

を考えると局所的に見てその外乱は小さくなるから励起エネルギーはいくらでも小さくできる。これが NG モードに対応するギャップレスの励起である。逆に量子系の基底状態がいかなる連続対称性をも破らないとき、一般には励起には有限のギャップがあると期待するのが自然である。この論理に従えば量子液体、スピン液体においては励起にギャップを持つと仮定することが自然である。ただし、ギャップレスの量子液体の存在は論理的には否定できないし、それゆえ、ギャップレスの量子液体を追求する理論、実験の多くの試みがあり、またそれらが興味深い所以でもある。³

量子ホール系はいわば現代物性物理学の玉手箱であり、興味ある概念を次々に生んできた。議論をはじめればはキリがないが、整数量子ホール相、多数の分数量子ホール相と多くの物質相がある。そして、そのほとんどは、如何なる対称性をも破らず、それぞれが量子液体相の典型である。そしてまた、その多様性故、何らかの分類学が必要とされていた。この状況下で、Witten の Topological field theory にある種のヒントを得て提案されたのが MIT の X.G.Wen による topological order なる概念である [7]。基底状態の縮退度が、物理系が住んでいる系のトポロジカルな形状に応じたものになるとされ、周期的境界条件下での分数量子ホール系の縮退度が Topological degeneracy として理解されることとなった。新しい概念と一言でいうが、正確には発展途上の未定義の概念というのが正しい⁴。Wen の言葉を借りれば、多粒子状態を構成する粒子の dancing pattern、若しくはエンタングルメントの様子が topological order だ(そうである)。ここではもう少し気楽に、トポロジカルな量を使って特徴付けられる物質相をトポロジカル秩序相と呼ぼう。

以下説明する我々の近年の試みは、このいわば正体不明のトポロジカル秩序をもう少しわかりやすく、具体的に理解しようという試みである。

2 幾何学的位相とベリー接続

2.1 成功の歴史からトポロジカルな秩序変数へ

量子液体の典型例が量子ホール相であり、その最も基本は整数量子ホール系である。2次元電子系に一樣な磁場を印加すると、系の一粒子エネルギー準位はよく知られたランダウ準位構造と呼ばれる等間隔のデルタ関数型の状態密度(ランダウ縮退)を持つものとなる。多粒子系のフェルミ準位がランダウギャップ内にあるとき、系の励起にはランダウギャップだけの有限のエネルギーが必要である。このいわばわかりやすい整数量子ホール相が、量子液体相の基本中の基本となる⁵。歴史を無視して結果だけをまず書き下そう。系のホール伝導度 σ_{xy} は、次のように書ける [8, 9, 10]

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C, \quad C = \frac{1}{2\pi i} \int_{T^2} F, \quad F = dA, \quad A = \langle G | dG \rangle$$

³量子ホール相は Girvin-MacDonald[4] 以来のストリング型の非対角秩序により特徴づけられると考えられるがこれはいわゆるゲージ依存量かつ非局所的な秩序であり、古典的な秩序形成とは区別が必要である。その一方これに関しても非局所的な秩序は系のゲージの自由度と深く関連しており、Haldane スピン系におけるストリング秩序 [5, 6] の例を引くまでもなく量子液体相の特徴の一つとも考えられる。

⁴勿論、物理としてはこの時代が楽しい。

⁵実験に観測される高い精度のホール伝導度に関してはアンダーソン局在が重要である。

ただし $\mu = x, y$ 方向の境界条件は $e^{i\phi_\mu}$ がつく「捻った」ものとする。このハミルトニアンを $H(\phi)$ として ($\phi = (\phi_x, \phi_y)$) スナップショット型の多粒子系の固有値問題 $H(\phi)|G(\phi)\rangle = E(\phi)|G(\phi)\rangle$ を考え、その基底状態の波動関数を $|G\rangle$ と書いた。肝は、 σ_{xy} がいわゆるトポロジカル不変量である(第一)チャーン数 C で書ける点にある。⁶ なお $|dG\rangle$ は、およそパラメータ ϕ_μ を変えた場合の基底状態の微小変化であり、もう少し詳しく書いて $A = \langle G|\partial_\mu G\rangle d\phi_\mu$ (μ で和) はベリー接続と呼ばれる。

なお、一度微分して A もう一度微分して $F = dA$ とし、それをひねり境界条件がつくる 2 次元トーラス T^2 上 ($e^{i2\pi} = e^{i0}$ に注意) で積分したものが C というわけである。これはベクトル解析的には $A = \mathbf{A} \cdot d\phi$, $\mathbf{A} = \langle G|\nabla G\rangle$ を意味し、 $F = (\text{rot } \mathbf{A})_z d\phi_x d\phi_y$ である。

次節で説明するように、ベリー接続 A は本質的に電磁気学におけるベクトルポテンシャルと同じ性質をもつ。すると閉曲面上ベクトルポテンシャルの微分すなわち磁場を積分したのものとして Dirac 単磁極の議論を思い出していただけるのではないだろうか [11]。その通り、議論はアナロジーを越えて完全に同じであり、単磁極の量子化に対応して、チャーン数 C が整数値に量子化する。すなわち C は、ここでの議論さえ成り立てば、必ず整数であり、これば物理的には多粒子系が全てのひねり型境界条件の下で励起ギャップ有限であれば、必ず整数値をとることを意味し、ギャップが有限である限り変化せず断熱不変量となる。実験で観測された極めて高い精度のホール伝導度の量子化をこのトポロジカル不変量の断熱普遍性に還元するわけである [8, 9, 10]。

量子液体相の典型例である整数量子ホール相はいかなる対称性の破れも伴わず、励起にギャップをもつ状態であるが、このチャーン数というトポロジカルな量でうまく特徴付けられるのである。チャーン数という数学上の少々変わった概念がホール伝導度という、実験物理学の基礎中の基礎、学生実験で観測するホール伝導度そのものであったのだ。世紀の大成功と言えよう。

この成功の歴史をふまえて、発想を逆に、一般の量子液体相、スピン液体相に対してベリー接続を作業変数としてトポロジカルな秩序変数を構成しようというのが提案の要点である [12, 13, 14]。

ホール伝導度の例ではひねり境界条件をパラメータとしてベリー接続を定義したが、提案する一般のトポロジカルな秩序変数に関しては何を外部パラメータとするかは、個別の量子液体相に応じて個々に検討しなければならない。通常の相の理論において何を秩序変数とするのかに対しては一般論は無力であり個々の考察が重要であるのと同じである。その一般論の意義は勿論、各論の有効性で判断されるわけである、我々の、ベリー接続によるトポロジカルな秩序変数の具体例に関しては、後ほどその幾つかを述べる。

2.2 量子干渉効果としてのベリー接続

ここでは、ベリー接続 A について、少し一般的な観点から考えてみよう。量子力学の教科書によれば古典的な物理量はエルミート演算子 O に対応した状態 $|G\rangle$ での観測値は $\langle O \rangle_G = \langle G|O|G\rangle$ となる。よく知られたように、この期待値は状態の位相には無関係で、状態を $|G_g\rangle = |G\rangle g$, $g = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ととっても $\langle O \rangle_{G_g} = \langle O \rangle_G$ と位相に依存しない。しかし量子論では古典論にない観測量もあり、その代表例が、2 つの異なる状態 $|G\rangle$, $|G'\rangle$ の間の量子干渉効果

⁶この例から分かるようにトポロジカルに非自明であることに電子相間には必要ない。

$\langle G|G' \rangle$ である。例えば有名なアハロノフ・ボーム効果ではこの種の干渉効果が直接観測されるとされている。この干渉効果は、 $\langle G|G' \rangle \rightarrow' \langle A|B \rangle' e^{i(\theta' - \theta)}$ のように状態の位相にあらわに依存する。よって状態 $|G\rangle$ とそれを少し変化させた状態との干渉効果を示す重なりは $\langle G|G + \delta G \rangle = 1 + \langle G|\delta G \rangle$ となることに注意すれば、ベリー接続 $A = \langle G|dG \rangle$ とはまさに量子干渉効果そのものであると言える。

固有値問題 $H|G\rangle = E|G\rangle$ は斉次問題なので、固有ベクトル $|G\rangle$ の位相は不確定である。これは数値的に固有ベクトルを求めた人なら必ず知っていると思う。受験数学で 2×2 行列の固有ベクトルをもとめるとき、第一成分を 1 とおいて、云々というところの任意性である。この位相の自由度はベリー接続 A に、以下のように影響する

$$A_g = \langle G_g|dG_g \rangle = g^{-1}Ag + g^{-1}dg = A + id\theta$$

一般には位相の自由度は全く自由なのでなめらかである必要もないが、なめらかに選ぶことができることを仮定して進もう (ゲージ固定)[12]。前述のベクトル解析の記法では $d^2\theta = (\text{rot } \nabla g) \cdot d\phi = 0$ であることに注意すれば $F_g = F$ であり、チャーン数 $C_g = C$ となる。このように波動関数の位相変換は、ベリー接続のゲージ変換を意味するから、チャーン数はゲージ不変であると表現しよう。

一般には基底状態近傍の状態は唯一とは限らず、パラメーター ϕ を変化させた際、数本 (M 本) が絡まり合っていることもある。例えばトーラス上の量子ホール系においては、トポロジカル縮退により占有率 $\nu = 1/q$ の Laughlin 状態においては $M = q$ である。この時、個々のエネルギー状態のベリー接続は、隣接準位との準位交差点で特異となり、よって各状態のチャーン数等も well-defined ではない。ただし M 個まとめて考えたとき、その上にエネルギーギャップが存在すれば M 個まとめた多重項としてのベリー接続を考えることが有効であり、このまとめて構成したベリー接続に対応するチャーン数、等ゲージ不変な量を考える限り well-defined となる。このとき M 個まとめた状態を $\psi = (|G_1\rangle, \dots, |G_M\rangle)$ と書いて、以下の行列としてのベリー接続 (非可換ベリー接続) を考えるのが有用である [15, 16, 13]。

$$A = \psi^\dagger d\psi = \begin{pmatrix} \langle G_1|dG_1 \rangle & \cdots & \langle G_1|dG_M \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle G_M|G_1 \rangle & \cdots & \langle G_M|dG_M \rangle \end{pmatrix}$$

個々のエネルギー準位は準位交差により特異性を持つが M 個状態をまとめた固有空間は他の状態からエネルギーギャップを隔てて安定に存在する。これは M 次元の非可換ベリー位相を定義し、 M 個の状態を混合する $U(M)$ のゲージ変換 $\psi_g = \psi g$, $g \in U(M)$ に関してゲージ不変なものは特異性を持たないことを意味する。このゲージ変換に対して $F = dA + A^2$ と少しだけ (通常のように) 拡張して定義すれば、単純計算から F の変換則は通常のように $F_g = g^{-1}Fg$ となる。よってチャーン数を $C = \frac{1}{2\pi i} \int \text{Tr } F$ と定義すればこれはゲージ不変であり、トポロジカル縮退した q 状態の上に励起ギャップがあれば well-defined な量となる。この時のホール伝導度は、トポロジカル縮退した状態間でのトレースを密度行列のトレースと考えれば規格化因子 $1/M = 1/q$ が自然に導入され、 $\sigma_{xy} = \frac{e^2 C}{h q}$ となる。これが Niu-Thouless-Wu 公式である [8]。

この議論では非可換ゲージ構造をトポロジカル縮退等の基底状態近傍の多重項構造から導入したが、この非可換ゲージ構想を考えることには、もう一つ大きな御利益がある。一般には、整数量子ホール効果に置いてはフェルミ準位以下に複数のランダウ準位が存在し、特にグラフェンならびに Hofstadter 問題等に代表される格子の周期構造が重要な場合、多数のランダウ準位を同時に計算に取り込む必要がある。グラフェンをいわゆる massless Dirac fermions と見なせば、負エネルギーの Dirac の海に作る無限個のランダウ準位を整合的に取り扱ってはじめて、フェルミエネルギーがゼロ近傍のホール伝導度を正確にもとめることができることを意味する。この場合、勿論多粒子の波動関数を用いてチャーン数を直接計算しても良いが、整数量子ホール系の場合、グラフェンであっても基本的にはフェルミ準位以下のランダウ準位に対応する一粒子状態を順にフェルミ準位まで詰めることにより基底状態が構成できることに注意すれば多粒子系のベリー接続 A をフェルミ準位以下の一粒子状態を全て束ねた一粒子多重項 $\psi = (|1\rangle, \dots, |M\rangle)$ から次のように構成できる $A = \text{Tr } a$, $a = \psi^\dagger d\psi$ 。これより多粒子系のホール伝導度を与えるチャーン数と一粒子状態 j ごとのチャーン数 $C_j = \frac{1}{2\pi i} \int da_j$, $a_j = \langle j|d_j\rangle$ との間に以下の関係があることとなる。

$$C = \sum_j C_j$$

物理的には多粒子のチャーン数はフェルミ準位以下の一粒子状態のチャーン数の総和で与えられることを意味する。これがホール伝導度の歴史的な TKNN 公式とよばれる基本公式であり、元々は線形応答理論により久保公式から導かれたものである [9]⁷。

このようにフェルミ準位以下の状態を束ねて考察することは、原理的意義以上に、実際の意義があることも注意しておこう。一般にはフェルミ準位以下の状態では捻った境界条件を課すことで多数の準位交差がおり、個々の C_j は必ずしも well-defined でないことも注意しておきたい。上記非可換ベリー位相の公式を用いることで、多粒子系のホール伝導度は多粒子系にエネルギーギャップさえあれば安定してトポロジカルな形で与えられることとなるのである。物理的には当然である。

このような多体のベリー接続を非可換ベリー位相から構成することにより、多数の一粒子状態をフェルミ準位以下に含む系でのチャーン数が安定して計算できるようになる。近年話題の磁場中グラフェンがその典型例であり、そのホール伝導度の計算にはいわゆる Dirac の海がつくる極めて多数のランダウ準位からのチャーン数をまとめて取り込むことが必須であり、非可換ベリー位相の方法によりはじめて現実的な計算が可能である [17]。またその際、格子ゲージ理論で用いられてきた有限格子での位相不変量の計算法を輸入して用いることも決定的に重要である [18]。これら 2 つの手法をもちいることにより第一原理的な電子論の計算においてチャーン数の計算を遂行することが可能となったことも指摘しておこう [19]。

⁷ただし、実験的に 4 端子法にて観測しているホール伝導度が周期的境界条件かつ無限大の系としてのバルクの物理量かどうかに関しては、必ずしも自明ではなく、実験配置もトポロジカルにはシリンダーとみなせるから (図 7)、後述のエッジ状態の遷移としてのエッジ状態による伝導度を観測していると理解する方が現実に近いのかもしれない。

2.3 対称性に守られた量子化

チャーン数は定義さえキチンとできていれば、必ず整数になり、断熱不変量となる。ただしパラメーター空間は2次元であることが必要で、少し拡張して第 n チャーン数なるものをも考えてもパラメーター空間は必ず偶数次元であることが必要である。では、最も簡単な1次元の(より広くは奇数次の)トポロジカルな秩序変数は作れないのであろうか? 勿論その候補は最も基本的かつ歴史的にも古い次式で与えられるベリー位相である [20]。

$$i\gamma = \int_L A$$

ここで L はパラメーター空間の閉曲線を意味する。前述のように状態の位相変換により定義されるゲージ変換のもとで、 A は変化するから、ベリー位相 γ もゲージ依存量となる。簡単の為に、状態1つの場合を考えると、このゲージ依存性は $i\gamma_g = i\gamma + i \int d\theta$ と書ける。すなわち $\int d\theta$ だけベリー位相はゲージに依存するわけだが、位相因子 $g = e^{i\theta}$ がパラメーター空間で一価であることから、周回積分 $\int d\theta$ は 2π の整数倍となる。これはベリーによる断熱過程の解析にともなう位相変化である $e^{i\gamma}$ の一意性とも整合的である。つまり、ベリー位相はゲージ依存であるが 2π の不定性を無視すれば確定することとなる [14]。

$$\gamma_g \equiv \gamma \pmod{2\pi}$$

チャーン数と異なりベリー位相は 2π を法としても、一般には量子化せず、任意の実数値をとる。量子化しなければ、系の連続変形に伴い連続に変化するから、いわゆるトポロジカル安定性をもたず、断熱不変量ともなり得ない。しかし、興味ある多くの物理系は完全に任意ではなくその多くの場合、何らかの対称性を持つことが多い。この場合、系の状態が対称操作の下で不変であることを要求すると、今説明した不定性と両立するベリー位相はある離散的な値に量子化する場合がある。これが対称性がまもるベリー位相の量子化(とその一般化)である [14, 21]。対称操作としては、電子正孔対称性、カイラル対称性など種々のものが考えられるが、以下しばらく時間反転対称性をその例としてベリー位相の量子化を説明しよう。時間反転対称な系の場合、スピン半奇整数の粒子数が奇の場合、クラマース縮退とよばれる縮退が起こるが、ここでは縮退の起こらない粒子数偶の場合を考えよう。系が時間反転操作 Θ の下で不変であるなら、縮退のない状態 $|G\rangle$ に時間反転操作を行った $|G_\Theta\rangle = \Theta|G\rangle$ も $|G\rangle$ と同じ状態であるはずであり、位相変換 $g \in U(1)$ で $|G_\Theta\rangle = |G\rangle g$ と結びついているはずである。一方時間反転 Θ が反ユニタリ演算すなわち複素共役操作を含んでいることより、 $|G\rangle$ と $|G_\Theta\rangle$ のベリー位相は符号が逆転していなければならない。以上をまとめると

$$\gamma_G \equiv \gamma_{G_\Theta} = -\gamma_G$$

となる。これを 2π を法として満たしうる実数は 0 と π のいずれか一方のみとなる。これがベリー位相の Z_2 量子化である。

大成功の歴史に裏付けられた対称性の破れの概念が使えない系として、量子液体相を特徴付けたにもかかわらず、対称性は再び、我々の物理を強く拘束し、量子化との興味深い構造をもたらすのである。我々の物理はかくも対

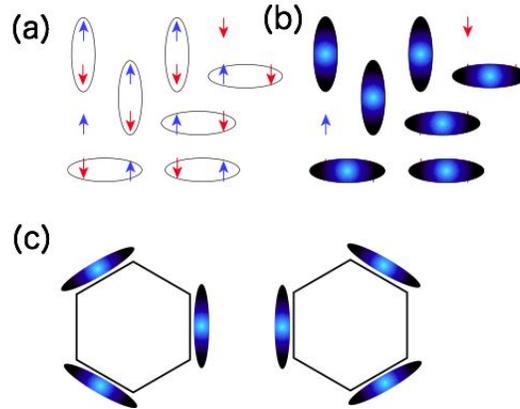


図 2: Anderson と Pauling の RVB

称性に深く関わり，対称性とは，どこまでも我々の物理を豊かにしてくれるものであることに驚く。

次の節では，断熱不変量であるこの Z_2 ベリー位相が，トポロジカル秩序変数として，具体的にどのように有用であり，如何に量子液体相を区別するのかを具体例をあげつつ説明したい。

2.4 シングレット秩序変数と分数化

高温超伝導体の理論は 20 年たってもまだ結論に至らない難問であるが，Anderson の RVB 理論の出発点である（ホールをドーブした）反強磁性体において重要なのは個々のスピン自体でなく，シングレット対であることは，皆が同意する（数少ない）論点であろう。系の基底状態としてシングレット対の組み替えを多数考え，その重ね合わせにより波動関数を構成しようというわけである（図 2）。このアイデアはより古く Pauling の RVB に遡る。（例えば）ベンゼンの基底状態における電子相間を考えるとき相互作用のない自由フェルミ気体を出発点に議論することをやめ，2 サイト間の bonding state により系全体を覆った状態の重ね合わせ，つまり共鳴状態として系の状態を表現しようと言うわけである（図 2）。いずれの場合も，スピン若しくは局在した電子といったいわば古典的な構成粒子からの議論をやめ，シングレット対，結合ボンドという簡単ではあるが，明らかに量子的な自由度を出発点の基礎に置こうという提案である。この描像をとれば，局所的なシングレット対の破壊によるシングレットトリプレット励起，そして結合-反結合ボンド間の局所励起を多粒子系の基本的な励起として，考えるのが自然であり，よって系は励起ギャップ有限のスピン液体状態，量子液体状態となるであろう。⁸ここに到れば系の状態を記述するのにスピン，局在電荷を用いることをやめ，シングレット対，結合ボンドを用いるのは自然な帰結である。量子液体相の記述においては，スピン，局在電荷を基礎とする秩序を探すことをやめ，局在した量子的な構造物としてのシングレット対，結合ボンドを用いようというのが，我々の提案の要点である。

⁸Anderson の RVB の場合，電荷の自由度に関しては，ホールが移動するの自由度がギャップレスの励起を作ることが自然である。

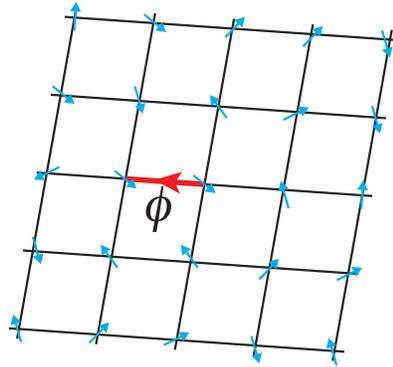


図 3: ベリー位相によるトポロジカルな秩序変数の定義

では、どうやってシングレット対を特徴付けたいのであろうか？シングレットはその名の通り内部構造をもたず、スピンゼロであるから外場に応答しない。ゼロつまりないものは見えないわけである。その一方でシングレット対は量子極限の存在であり、以下示すようにベリー位相 $\gamma = \pi$ を運ぶ。つまりスピンをもたないシングレット対がベリー位相で見ると見えるわけである。

2サイト問題として次のハミルトニアン $H = 2S_A \cdot S_B$ を考えよう。ここで、 $S_{A,B}$ はスピン $1/2$ の量子スピンであり H の基底状態はシングレット対 $(|\uparrow_A \downarrow_B\rangle - |\downarrow_A \uparrow_B\rangle)/\sqrt{2}$ となる。ここで、Bサイトのみスピン空間で z 軸周りに角度 ϕ 回転して捻ったハミルトニアン $H(\phi)$ を考えよう ($\phi: 0 \rightarrow 2\pi$)。

$$\begin{aligned} H(\phi) &= (S_A^x, S_A^y, S_A^z) \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & \\ \sin \phi & \cos \phi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_B^x \\ S_B^y \\ S_B^z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (e^{-i\phi} S_A^+ S_B^- + e^{+i\phi} S_A^- S_B^+) + S_A^z S_B^z \end{aligned}$$

この基底状態は、適当に位相をとって、たとえば、 $|\phi\rangle = (|\uparrow_A \downarrow_B\rangle e^{-i\phi/2} - |\downarrow_A \uparrow_B\rangle e^{i\phi/2})/\sqrt{2}$ となる。位相の自由度はベリー接続の議論ではゲージの自由度に対応し、この「適当に」とった位相をキチンと確定する過程がゲージ固定である。これを少し丁寧に書いてみよう。 $|\phi\rangle$ は位相の不定性を持つが、基底状態への射影演算子 $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ は一意的であり、任意に選んだゲージ固定を指定する状態を、たとえば $|t_1\rangle = |\uparrow_A \downarrow_B\rangle$ とすれば、このゲージ固定された基底状態の波動関数は

$$|\phi\rangle_1 = P|t_1\rangle/\sqrt{N_t} = (|\uparrow_A \downarrow_B\rangle - |\downarrow_A \uparrow_B\rangle e^{i\phi})/\sqrt{2}$$

となる。ここで N_t は規格化定数で $N_t = |\langle\phi|t_1\rangle|^2 = 1/2$ である。これを使ってベリー位相は $\gamma = \int_0^{2\pi} \langle\phi| \frac{d}{d\phi} |\phi\rangle_1 d\phi = \pi$ となる。すなわちシングレット対はベリー位相 π を運ぶ。

多粒子系（多スピン系）に対しては、図3のように、局所的な周期的摂動（例えば上述のスピンひねり）を多粒子系に加えることにより多粒子系の基底状態の波動関数を使ってベリー接続を定義し、量子化するトポロジカルな物理量を定義する。例えば一次元のパラメータを局所スピンひねりとして導入することで量子化ベリー位相を定義し、それをトポロジカルな秩序変数とするわけである。

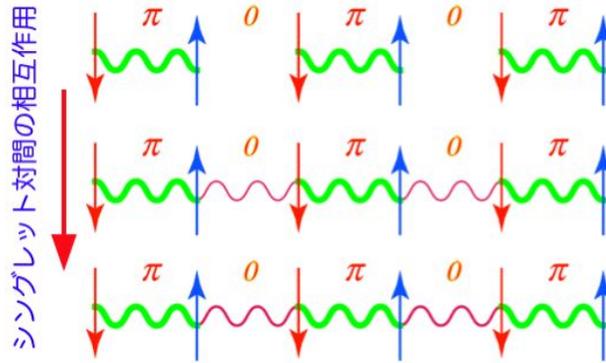
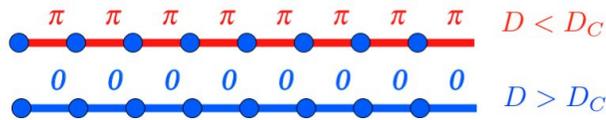


図 4: 量子化ベリー位相のトポロジカル安定性

図 5: $S = 1$ のハイゼンベルグ鎖におけるベリー位相によるトポロジカル秩序変数

時間反転に対してスピン演算子は $S_i \rightarrow -S_i$ と奇に変換するから、スピン系のハミルトニアンがスピン演算子について 2 次、例えば、ハイゼンベルグスピン系であれば、系のフラストレーションの有無によらず時間反転対称となる。よって、対称性が保護するベリー位相は \mathbb{Z}_2 に量子化したトポロジカルな秩序変数となる。

量子ホール系の場合、境界条件という大域的な摂動に対するベリー接続がチャーン数のという大域的なトポロジカル秩序変数を定義しこれが系を特徴付けると考えるわけである [13]。

ここでトポロジカルな秩序変数の物理的意義を例を用いて説明しよう。まず、シングレット対を図 4 のように鎖状に並べ、シングレット対間に交換相互作用を徐々に導入することを考える。まず、シングレット対が完全に切れてるときには、明らかにシングレット対を作る場所の \mathbb{Z}_2 秩序変数は π であり、切れているところを捻って作ったのベリー位相は 0 である（切れてるところを捻っても影響なし）。つまり秩序変数は $\pi, 0, \pi, 0, \dots$ となる。ベリー位相は常に量子化しているから、シングレット対間の相互作用を徐々に増加させても変化し得ないつまり、ベリー位相のパターンは不変である。ただし、これには条件があって、多粒子系の基底状態が孤立していること、つまりエネルギーギャップが閉じないことが必要である。非摂動状態でギャップが有限であることのみならず、ベリー位相を計算するために導入したひねりの存在下すべてのハミルトニアンに対してギャップが有限であることが必要である。無限小の結合でダイマー化ギャップがつぶれることはないから、強結合の有限の領域では交替的なベリー位相が、ダイマー状態を特徴付けることになる。反強磁性的な結合を徐々に増加させた場合、シングレット対を作る交換相互作用と等しくなったときにはギャップがつぶれ、交替的なベリー位相のパターンが逆になる。一方強磁性的な結合の場合もギャップがつぶれない限りシングレット対のベリー位相が π 、それ以外は 0 のままである。シングレット対間の結合を強磁性的とした場合の強結合極限は Hida の研究にあるようにス

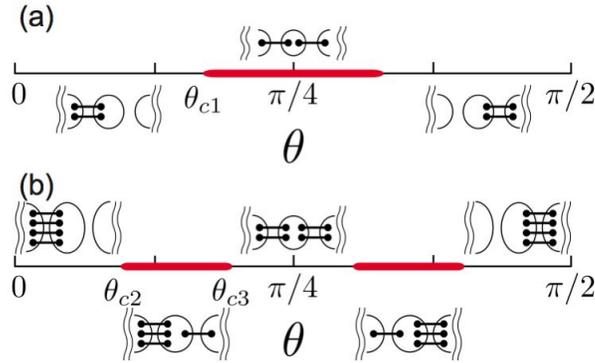


図 6: 整数スピン鎖における, 逐次ダイマリゼーション転移のトポロジカルな秩序変数による特徴付け。(a) $S = 1$, 14 サイト。(b) $S = 2$, 10 サイト。ともに周期的境界条件を課した。

ピン 1 のハイゼンベルグスピン鎖となるので [22], いわゆる Haldane 相は一樣で並進対称なベリー位相 π で記述されることを示唆する (図 5)。さらに, $S = 1$ のスピン鎖のハミルトニアンを $H = J \sum_i S_i \cdot S_{i+1} + D \sum_i S_i^2$ と書けば, $D = 0$ が Haldane 相であり, $D \gg J > 0$ となれば, 各サイトのスピン状態が本質的に $S_i^z = 0$ により与えられる Large D 相に転移する。この Large D 相においては Z_2 ベリー位相によるトポロジカルな秩序変数は至る所 0 となる [14, 23]。すなわち, この Z_2 ベリー位相は Haldane 相-Large D 相間の量子相転移を記述するトポロジカルな秩序変数である (図 5)。

整数スピン鎖においては交代鎖における交換相互作用の比を変化させることにより逐次型の量子相転移が生ずることが予言されているが [24], 実際の $S = 1, 2$ の整数スピン鎖において, ベリー位相の計算をおこなうと, 図 6 にあるような相図が得られる。ここで, トポロジカルな秩序変数は常に並進対称であり, 一次元鎖のハミルトニアンを $H = J_e \sum_{i:\text{even}} S_i \cdot S_{i+1} + J_o \sum_{i:\text{odd}} S_i \cdot S_{i+1}$ と書き $J_e = \cos \theta$, $J_o = \sin \theta$ として $\theta : 0 \rightarrow \pi/2$ に対してトポロジカルな秩序変数が π となる相を赤で示した。

これより, ダイマリゼーション逐次転移がトポロジカルな秩序変数にてうまく記述されていることが見て取れる。なお, 図に併記した概念図は Haldane 相に対する AKLT 模型 [25] の拡張として整数スピンを複数の $S=1/2$ スピン間のフント結合により表現し, 反強磁性結合を複数のシングレット対により概念的に示したものである。反強磁性結合が強いほど多くのシングレット対が, そのボンドに多く存在すると仮定した。この表現によれば, シングレット対一つあたり Z_2 ベリー位相 π を運ぶと考えると全体の相図が整合的に理解できる [26]。さらに, AKLT 模型を拡張した 1 次元の可解模型においてもベリー位相によるトポロジカルな秩序変数は計算され, その結果もシングレット対あたりベリー位相 π との解釈と整合する [26]。これは整数スピン鎖においても, 本質的にトポロジカルな秩序変数はスピン $1/2$ の仮想スピンであるとの意味で, 分数化 (fractionalization) の構成的な具体例であるとみなせる。

ここでは, 一次元整数スピン鎖に対するトポロジカル秩序変数の有効性を述べたが, 有限系の基底状態が求まり, 励起ギャップが有限である限り, 次元によらず同様の議論は遂行できる。ただし何を周期的パラメータとして量子化ベリー位相を定義するかは各論の問題であり, 適切に問題を設定する必要

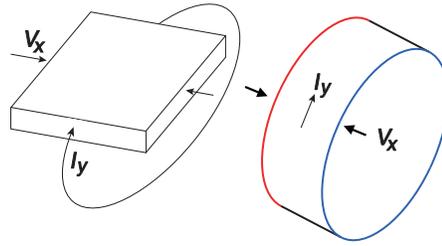


図 7: 2次元電子系と Laughlin の議論の舞台であるシリンダー

がある。具体的には、2次元ランダムホッピング系 [14, 23], 2次元 VBS 固体相 [14, 23] 一次元 t-J 模型 [27], はしごスピン鎖 [23, 28, 29], 2次元直交ダイマー系 [30], 超伝導における BEC-BCS クロスオーバー現象 [31], 等に関する研究もある。

なお、計算には有限系の対角化が必要であるが、量子化する物理量を計算する限り、ギャップの存在に確証がもてれば、それ程大きな系まで計算する必要はないことは数値的にはきわめて有利である。相互作用を断熱的に印加する過程に関してギャップは通常トポロジカルに安定と考えられるので自由フェルミ粒子系に対して得られたトポロジカル秩序変数は相互作用下でも不変であることは量子ホール効果の例と同様である。この事実は具体的なベリー位相の計算においては極めて有効である。

さらに最近ベリー位相の量子化を保護する対称性を拡張することにより Z_Q ($Q = d + 1$) ベリー位相すなわち $2\pi n/Q, n = 0, 1, 2, \dots, n-1, (\text{mod } 2\pi)$ が、ある種の d 次元フェルミ粒子系に対して定義された [32]。この系は 2次元カゴメ格子ならびに 3次元パイロクロア格子をふくみ、ギャップをもつフラストレートした電子系の固定点の模型となることが期待される。この系において、 Z_Q トポロジカル秩序変数は、フラストレートした電子系における一般化したダイマリゼーション転移をトポロジカルに記述するものである。

3 バルクーエッジ対応

前節までに説明したように、励起にギャップをもつ量子液体に対して量子干渉効果としてのベリー位相を用い、トポロジカル秩序変数構成し相の分類を行ってきた。勿論、この量子干渉効果そのものも実験的な観測可能量であるから、例えば、ベリー位相を直接観測することも原理的には可能なはずである。その一方、その実験的観測の困難さは、(残念ながら)同種の量子干渉効果を用いる量子情報処理に比べられよう。勿論、量子ホール効果におけるホール伝導度は、線形応答により直接バルクの観測量につながるこの意味でここでも特異の重要性をもつ。

一方、量子ホール効果の研究においてはその初期に Halperin によりホール伝導度の量子化をエッジ状態とよばれる束縛状態に帰着させる理論が提案され、局在状態の重要性が当初から理解されていた [33]。古典的には一様磁場下の荷電粒子は円運動するが、バルクでは隣接する円運動からの電流は打ち消し、境界でのみ一方向に電流が流れる (Chiral な) 状態が存在する。これを量子化したものが量子ホール効果におけるエッジ状態でありそのエネルギー

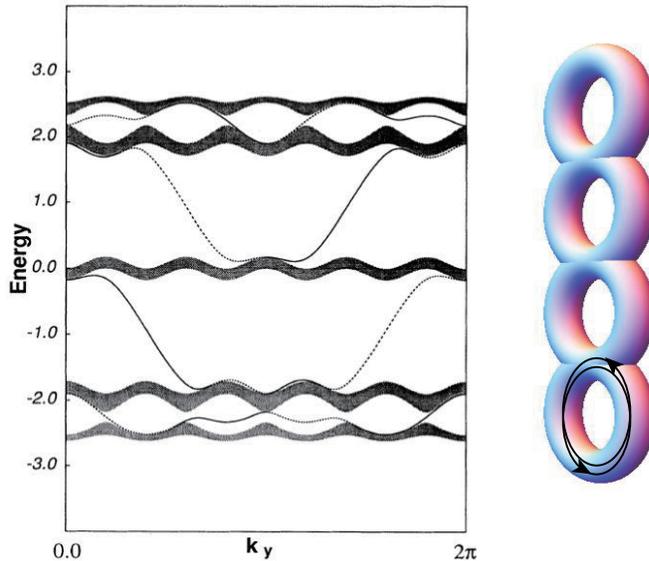


図 8: エッジ状態とその複素エネルギー面の概念図。左図における斜線部分がランダウバンドで実線、破線がエッジ状態のエネルギーである（実線がシリンダー上左端に局在、破線が右端に局在）対応して複素エネルギー面上エッジ状態はギャップに対応する「穴」を回る。図の第一ギャップの場合 2 回周り、それがホール伝導度 $2(e^2/h)$ に対応する [35]。

はランダウギャップ内に存在する。整数量子ホール効果の原理的理解はいわゆる Laughlin の議論による図 fig:cyl のようなシリンダー上でのゲージ変換の理論に始まるが [34], Halperin によるこのエッジ状態の理論は Laughlin の議論では明確に示されてなかった Laughlin の議論におけるエッジ状態の役割を円環上にて明確に示したものであると理解できよう。

前節の議論のようにバルクのホール伝導度に関しては TKNN 及び Niu-Thouless-Wu によるトポロジカルな意義が明確であるが、このエッジ状態によるホール伝導度に対しても全く異なるトポロジカルな意義がある [35]。ここでは詳細は省略するが、その結果の概要をここで述べよう。

まず、シリンダーの円周方向の波数ごとに 2 次元系を分解することで波数パラメータとする一次元系の集合と見なす。磁場中の 2 次元電子系を格子上で考えるとき、格子あたりの磁束が磁束単位で計って p/q , (p, q は互いに素な整数) であるとき、波数をパラメータとして指定される 1 次元系のエネルギーバンドは q 個あり、これがランダウ準位に対応する。これはいわゆる Hofstadter の問題である。この時バンドギャップは $g = q - 1$ 個あり、エッジ状態はギャップの数だけ存在する。このとき、系の複素エネルギー面はギャップの数 g を種数とする Riemann 面 (穴が g 個あいた浮き輪) となり、エッジ状態のエネルギーはこの複素エネルギー面上、ある関数の零点で与えられる。ここで、格子系での波数は周期的であることに注意すると波数を周期的に動かすとき、この g 人乗りの浮き輪上ギャップの数だけあるエッジ状態を指定する零点は g 個の穴の周りをそれぞれ、 I_j 回、回転する ($j = 1, \dots, q$)。ここで複素エネルギー面上の位置がエッジ状態が、波動関数が左右いずれの境界に局在しているかを指定することを用いると Laughlin の議論を用いてフェ

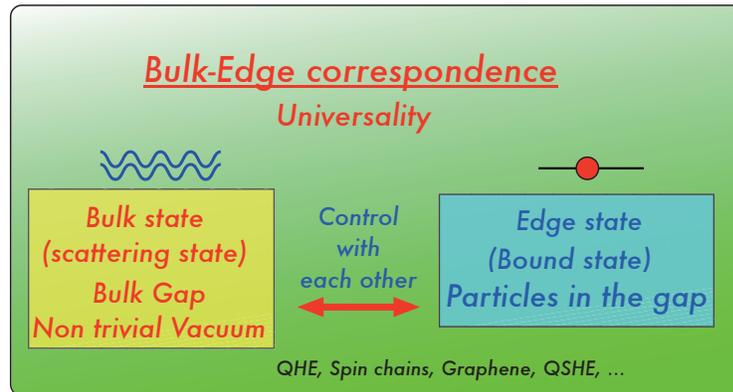


図 9: バルク・エッジ対応

ルミエネルギーが下から j 番目のランダウギャップにある時の系のホール伝導度は以下のように与えられることとなる [35]

$$\sigma_{xy}^{\text{edge}} = \frac{e^2}{h} I_j$$

回転数 I_j は整数のトポロジカル数である。

さらに少し丁寧な議論をすればエッジのトポロジカル数 I_j とバルクのトポロジカル数であるチャーン数の間に明示的な関係があることが示せる [36]。これは j 番目のランダウ準位に対応するエネルギーバンドのチャーン数を C_j として

$$C_j = I_j - I_{j-1}$$

と表せる ($I_0 = 0$)。これは、量子ホール系においては、バルクの物理が境界周りに誘起される局在したエッジ状態の振る舞いを規定することを示し、逆にまた、エッジ状態の物理がトポロジカルに非自明なバルクの電子状態を支配することを意味する。このように、トポロジカルに非自明な系においては、バルクとエッジは独立ではあり得ず、お互いを規定することを意味する。これを「バルク・エッジ対応」として少し広い観点から理解しよう。⁹ 量子ホール効果に関してはバルク・エッジ対応は証明された事実であるが、その後、現在まで続く種々の研究により、この概念は量子ホール系のみならず、トポロジカルに非自明な系において広く普遍的に適用される(らしい)ことが多くの具体例から信じられるに到った。励起ギャップを持つバルクのトポロジカル相はある種の真空であり、そこに境界を作ることによって生じる局在状態としてのエッジ状態は粒子とみなせる。真空と粒子はお互いがもう一方を規定し、お互いの性質を反映するわけである。

真空は実験的に記述するのが困難であるが、粒子、すなわちエッジ状態は実験的に容易に検出できるのである。このバルク・エッジ対応により、エッジ状態もまた一つのトポロジカル秩序変数と呼べるのである。¹⁰

⁹量子力学の Levinson の定理、すなわち、束縛状態の個数は散乱状態の位相のずれが規定することが最も基本的な例であろう。

¹⁰ストリング理論等の議論における holographic principle との類似を指摘しておくことも、もしかすると無責任な想像以上の意義があるのかもしれない。

スペースに余裕がないが量子ホール相以外に物性論におけるこの「バルクエッジ対応」として理解できる具体例を幾つか列挙してこの節を終わろう。

- スピン量子ホール状態としての狭義のトポロジカル絶縁体におけるスピンエッジ状態，表面 Dirac fermion ¹¹
- 異方の超伝導体の Andreev 局在状態 [37, 38, 39]。
- ポリアセチレンのソリトン [40]。
- グラフェン Zigzag 端の藤田状態 [41, 39]。
- 磁気フォトニック結晶における one-way 局在モード [42]。
- 冷却原子系における局在モード [43]。
- 半導体における分極と表面電荷 [44, 45]。
- 並進対称な系のベリー位相と Lieb-Schultz-Mattis の定理との整合性 [46]。
- Haldane 系における不純物状態としての Kennedy 三重項 [47] と分数化，エンタングルメントエントロピー [26, 48]。

これらはそれぞれ非常に興味深い物理をそれぞれ含む話題ではあるが，キリがないので，これ以上の解説，議論は他の機会に譲ってここでは割愛せざるを得ない。バルク・エッジ対応の普遍性の一端を読み取っていただければ幸いである。

おわりに

最後に青木秀夫，X.-G. Wen, 丸山勲，桂法称，福井隆裕，河原林透，新井正男の皆さんには，関連の話題をいろいろご議論いただいたことをならびに，多くの共同研究者の方々に感謝しての解説を終わりたい。なお，本研究は科研費基盤研究 B「幾何学的位相による物質相：量子液体及びグラフェンでの応用と展開」(23340112) の支援の下に行われたものである。

参考文献

- [1] K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.*, 45, 494, 1980.
- [2] R. B. Laughlin. *Phys. Rev. Lett.*, 50, 1395, 1983.
- [3] F. D. M. Haldane. *Phys. Lett.*, A93, 464, 1983.
- [4] S. Girvin and A. H. MacDonald. *Phys. Rev. B.*, 58, 1252, 1987.
- [5] M. den Nijs and K. Rommelse. *Phys. Rev. B*, 40, 4709, 1989.
- [6] S. Girvin and D. Arovas. *Phys. Scr.*, T27, 156, 1989.
- [7] X. G. Wen. *Phys. Rev. B*, 40, 7387, 1989.
- [8] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y. S. Wu. *Phys. Rev. B*, 31, 3372, 1985.

¹¹トポロジカルな絶縁体と言えば量子スピンホール相というのが近年の言葉の用法である(らしい)が，歴史的には，より広く励起ギャップをもつ量子液体をトポロジカル絶縁体と呼んできた。

- [9] D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale, and M. den Nijs. *Phys. Rev. Lett.*, 49, 405, 1982.
- [10] M. Kohmoto. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 160, 355, 1985.
- [11] P. A. M. Dirac. *Proc. R. Soc., A* 133, 60, 1931.
- [12] Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 73, 2604, 2004.
- [13] Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 74, 1374, 2005.
- [14] Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 75, 123601, 2006.
- [15] F. Wilczek and A. Zee. *Phys. Rev. Lett.*, 52, 2111, 1984.
- [16] Y. Hatsugai, S. Ryu, and M. Kohmoto. *Phys. Rev. B*, 70, 054502, 2004.
- [17] Y. Hatsugai, T. Fukui, and H. Aoki. *Phys. Rev. B*, 74, 205414, 2006.
- [18] T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 74, 1674, 2005.
- [19] M. Arai and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 79, 075429, 2009.
- [20] M. V. Berry. *Proc. R. Soc., A*392, 45, 1984.
- [21] Y. Hatsugai. *New J. Phys.*, 12, 065004, 2010.
- [22] K. Hida. *Phys. Rev. B*, 45, 2207, 1992.
- [23] Y. Hatsugai. *J. Phys. Condens. Matter*, 19, 145209, 2007.
- [24] M. Oshikawa. *J. Phys. Condens. Matter*, 4, 7469, 1992.
- [25] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki. *Phys. Rev. Lett.*, 59, 799, 1987.
- [26] T. Hirano, H. Katsura, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 77, 094431, 2008.
- [27] I. Maruyama and Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 76, 113601b, 2007.
- [28] I. Maruyama, T. Hirano, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 79, 115107, 2009.
- [29] M. Arikawa, S. Tanaya, I. Maruyama, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 79, 205107, 2009.
- [30] I. Maruyama, S. Tanaya, M. Arikawa, and Y. Hatsugai. *arXiv:1103.1226*.
- [31] M. Arikawa, I. Maruyama, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 82, 073105, 2010.
- [32] Y. Hatsugai and I. Maruyama. *EPL*, 95, 20003, 2011.
- [33] B. I. Halperin. *Phys. Rev. B*, 25, 2185, 1982.
- [34] R. B. Laughlin. *Phys. Rev. B*, 23, 5632, 1981.
- [35] Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 48, 11851, 1993.
- [36] Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Lett.*, 71, 3697, 1993.
- [37] C. Hu. *Phys. Rev. Lett.*, 72, 1526, 1994.

- [38] Y. Tanaka and S. Kashiwaya. *Phys. Rev. Lett.*, 74, 3451, 1995.
- [39] S. Ryu and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 077002, 2002.
- [40] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. *Phys. Rev. Lett.*, 42, 1698, 1979.
- [41] M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, and K. Kusakabe. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 65, 1920, 1996.
- [42] Z. Wang, J. D. Joannopoulos Y. D. Chong, and M. Soljacic. *Phys. Rev. Lett.*, 100, 013905, 2008.
- [43] V.W. Scarola and S. Das Sarma. *Phys. Rev. Lett.*, 98, 210403, 2007.
- [44] R. D. King-Smith and D. Vanderbilt. *Phys. Rev. B*, 47, 1651, 1993.
- [45] R. Resta. *Rev. Mod. Phys.*, 66, 899, 1994.
- [46] T. Hirano, H. Katsura, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 78, 054431, 2008.
- [47] T. Kennedy. *J. Phys. Condens. Matter*, 2, 5737, 1990.
- [48] H. Katsura, T. Hirano, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B*, 76, 012401, 2007.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 2 2 3 4 5 6 7 8
9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 3 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 4 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
5 6 5 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 6 2 3 4 5 6
7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 8 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
3 4 5 6 9 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 0 2 3 4
5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 2 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
1 2 3 4 5 6 3 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 4 2
3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 5 2 3 4 5 6 7 8 9 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 6 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8
9 0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
8 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 9 2 3 4 5 6 7 8
9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 0 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6
7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
5 6 2 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 3 2 3 4 5 6
7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 4 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4
5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 5 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
3 4 5 6 6 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4
5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 8 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2
3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 9 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
1 2 3 4 5 6 0 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 1 2
3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 2 2 3 4 5 6 7 8 9 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6