Chern類の量子化

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} C$ 量子ホール効果

$\frac{1}{2\pi i}\int d\vec{S}_k \cdot \vec{\nabla} A \qquad \vec{S} \parallel z$

Chern数の量子化について

$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2} d^2k \, (\nabla \times \vec{A})_z}$$

TKNN '82

Kohmoto '85

$T^2 = \{(k_x, k_y) \mid k_x : 0 \to 2\pi,\ k_y : 0 \to 2\pi\}$

ブリルアンゾーン

$|\psi(\vec{k})\rangle$: ブロッホ関数　　並進対称

$[H, T_{x,y}] = 0$

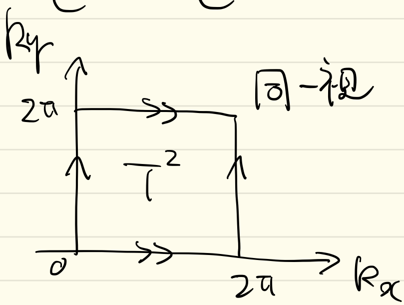
同時対角化

$$\begin{cases} H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \\ T_x|\psi(\vec{k})\rangle = e^{ik_x}|\psi(\vec{k})\rangle \\ T_y|\psi(\vec{k})\rangle = e^{ik_y}|\psi(\vec{k})\rangle \end{cases}$$

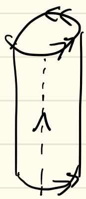
x方向への並進

y　〃

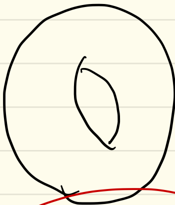
$e^{i0} = e^{i2\pi}$



同一視



T^2



トーラス

境界なし

$\vec{A}$? ベリー接続

Berry connection

$$\boxed{\vec{A} = \langle \psi | \vec{\nabla}_k \psi \rangle}$$

$\vec{k}$ 微分 $\vec{\nabla}_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial k_x} \\ \frac{\partial}{\partial k_y} \\ \frac{\partial}{\partial k_z} \end{pmatrix}$

$H(\vec{k})|\psi(\vec{k})\rangle = E|\psi(\vec{k})\rangle$ $\quad *$

Schrödinger 方程式

から定まる

一応 k_z と

本当か？

ッッこうこ！ (Berry)

ランダムに

$*$ に $e^{i\theta}$ をかけて $\theta = \theta(k)$ と k に依存していい

$$H(k)\underbrace{|\psi(k)\rangle}_{|\psi\rangle'} e^{i\theta} = E\underbrace{|\psi(k)\rangle}\, e^{ik}$$

$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle = 1$

$|\psi\rangle$ と $|\psi'\rangle$ は同等，位相は決まらない！

c.f. 數値計算

のブワブラムでも！

位相が決まらないと

微分できない $\dfrac{|\psi(k+\Delta k)\rangle - |\psi(k)\rangle}{\Delta k}$ 位相が任意だと $\Delta k \to 0$ で等しくならない！

ではどうするか？

位相を一意に決める：gauge 固定

その前に一応 Θ はなめらかとすると

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle e^{i\Theta}$$

$$\vec{A}' = \langle\psi'|\vec{\nabla}\psi'\rangle = e^{-i\Theta}\langle\psi|\nabla\psi\rangle e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1} i\nabla\Theta\, e^{i\Theta}$$

$$= \vec{A} + i\vec{\nabla}\Theta$$ ：電磁気学のゲージ変換と同じ！

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ とすると $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla} = 0$ より

$\vec{B}' = \nabla\times\vec{A}' = \vec{B}$ ：gauge 不変（性）

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2} d\vec{S}\cdot\underbrace{\nabla\times A}_{\nabla\times A' \text{でも同じ}}$$

チャーン数はゲージ不変

（どんな位相で計算してもよい）

でも計算するには位相がなめらかに決まっていないとダメ！！

A こ

ではどうするか?

gauge 固定（位相をきめる!） Kohmoto '85

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$ ベクトル!

第1成分を実数で正に定めればよい!

（多くの固有計算のプログラム?）

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 2.0+3.5i \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$$ なら $|\psi'\rangle = |\psi\rangle / (2.0+3.5i)$

として単に規格化すればいい!

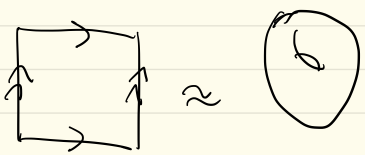
$A = \langle\psi|\nabla\psi\rangle$ と $\vec{B} = \nabla\times A$ を計算できる

$\rightarrow$ $$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2} d\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

! ストークスの定理を使うと簡単になります!

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\underbrace{\partial T^2}_{=0}} d\vec{l}\cdot\vec{A} = 0$$!?

∂T^2



境界がない!

σ_{xy} も 0

量子ホール効果

Klitzing

!?

どこかに誤り?

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

第1成分を実数で正に定めればよい!

* が0だったらこうはできない!

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$$

← ここを正の実数に規格化しなおす

もちろん $|\psi\rangle \propto |\psi'\rangle$

$|\psi'\rangle = |\psi\rangle e^{i\theta}$ とすると

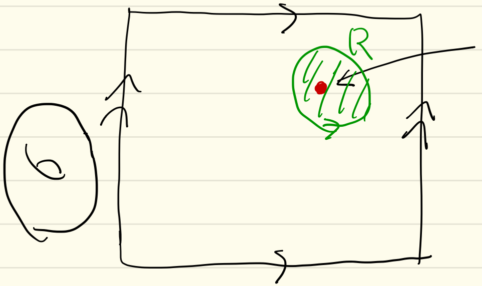
$$A' = A + i\nabla\theta$$

$$A' = \langle\psi'|\nabla\psi'\rangle \qquad B' = \nabla\times A'$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel$$

$$A = \langle\psi|\nabla\psi\rangle \qquad B = \nabla\times A$$

T² ブリルアンゾーン



$\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$ となる点 のまわりを R とくりぬく

$$T^2 = R + (\underbrace{T^2 \setminus R}_{\text{それ以外}})$$

R: $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$ と 2番目を正の実数にする gauge A'

$T^2 \setminus R$ $\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ \vdots \end{pmatrix}$ と 1番目を正の実数にする gauge A

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2} d\vec{S} \cdot \nabla \times A$$

∂Rは境界近くでは1番目, 2番目ともに 0 にならない

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_R d\vec{S} \cdot \nabla \times A + \frac{1}{2\pi i}\int_{T^2 \setminus R} d\vec{S} \cdot \nabla \times A$$

わけて別々に ストークスの定理

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} d\vec{l} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial (T^2 \setminus R)} d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

$\partial(T^2 \setminus R) = -\partial R$ 逆向き

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} d\vec{l} \cdot \vec{A}' - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} d\vec{l} \cdot \vec{A}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} d\vec{l}\cdot(A'-A) \qquad \left\{ A' = A + i\vec{\nabla}\theta \right.$$

$e^{i\theta}$ が一価

$$= \frac{i}{2\pi i}\int d\vec{l}\cdot\vec{\nabla}\theta = \frac{1}{2\pi}\,\theta\Big|_{始点}^{終点} = \frac{1}{2\pi}\,2\pi\,\underbrace{n}_{整数}$$

$$= n$$

つまり $C = n$: 整数

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\,n$$

整数量子ホール効果

→ TKNN の本質

$\boxed{\text{c.f. Berry phases} \quad \gamma = \int_{\partial R} d\vec{l}\cdot\vec{A},\ \ \gamma' = \int_{\partial R} d\vec{l}\cdot\vec{A}'. \quad \gamma' = \gamma \mod 2\pi}$

gauge fixing ゲージ固定の一般論 Hatsugai '05

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, $|\psi\rangle$: $|\psi'\rangle = |\psi\rangle e^{i\theta}$

$P \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ 射影 projection , $P^2 = |\psi\rangle\overbrace{\langle\psi|\psi\rangle}^{1}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|$

$= |\psi'\rangle\langle\psi'|$ 位相はうち消す : gauge 不変 well-defined

$P^\dagger = P$

$H \cdot (\text{列}) = E \cdot (\text{列})$ ← $|\psi\rangle$ 固有ベクトル

$P = (\text{列})(\text{行}) = $ 行列

$HP = H|\psi\rangle\langle\psi|$

$= E|\psi\rangle\langle\psi|$

$= EP$ ⊛

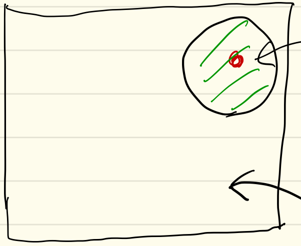
$|\phi_T\rangle$: 任意のある状態

$|\Psi\rangle \equiv P|\phi_T\rangle$ とすると $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$: 位相も定まっている!

O.K.? No! 規格化されていない!

$N_T = \langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\phi_T|P^2|\phi_T\rangle = \langle\phi_T|\psi\rangle\langle\psi|\phi_T\rangle = |\langle\psi|\phi_T\rangle|^2$

$|\psi_T\rangle = |\Psi\rangle/\sqrt{N_T}$ とすれば O.K.? $N_T \neq 0$ なら! $N_T = 0 \Rightarrow$ 別な $|\phi_T'\rangle$ でやり直す!



$N_T = 0 \quad |\psi_{T'}\rangle = P|\phi_{T'}\rangle/\sqrt{N_{T'}} \quad N_{T'} \neq 0$

となる$|\phi_T\rangle$で gauge 固定

$N_T \neq 0 \quad |\psi_T\rangle = P|\phi_T\rangle/\sqrt{N_T}$ とする.

例 $|\phi_T\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow |\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ * \\ * \\ \vdots \end{bmatrix}$

∂R で $N_T \neq 0, N_{T'} \neq 0$

$\rightarrow \langle \phi_T | \psi \rangle = a \quad . \quad N_T = |a|^2$

先ほどの例!

Kohmoto '85