— 解析力学:試験問題 — 2007. 6.26 (8:40—9:55) 初貝

I. １次元の質量 m の質点の運動を考えよう。ただし、時刻 t において質点に働く力を $F(t)$, 質点の座標を $x(t)$ とする。

I.1 質点に働く力 F が時間に直接依存せず質点の位置 x にのみ依存し $F = f(x(t))$ と与えられる時、ポテンシャル $V(x)$, ($F(t) = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=x(t)}$) が存在する。この $V(x)$ を f を用いて書き下せ。

I.2 ニュートンの運動方程式から、力学的エネルギー $T+V$ が時間に依存しないことを導け。ただし T は質点の運動エネルギーである。

I.3 この運動をラグランジュ形式で議論しよう。

I.(3-1) この系のラグランジュ関数 $L(x,\dot{x})$ を書き下せ。

I.(3-2) 最小作用の原理とは何かのべよ。

I.(3-3) 最小作用の原理からニュートンの運動方程式を導け。

I.4 つぎに同じ運動を正準形式で議論しよう。

I.(4-1) $H \equiv p\dot{x} - L,\ p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ としたとき、H が x と p のみの関数で $\dot{x}$ に依存しないことをしめせ。

I.(4-2) 正準変数 (x,p) で、正準方程式を書き下せ。

I.(4-3) 正準方程式からニュートン方程式を導け。

II. 電荷 e, 質量 m の質点の一様な電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 中での運動を議論する。

II.1 時刻 t での質点の位置を $\boldsymbol{R}(t)$ としてローレンツ力を受ける荷電粒子のニュートンの運動方程式を書き下せ。

II.2 時刻 t, 場所 $\boldsymbol{r}$ ごとに定まるポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ により、電場と磁場は $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi,\ \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ と与えられる。$(\boldsymbol{R})_i = x_i, (i = 1,2,3)$ に対する II.1 の運動方程式をポテンシャルで書き下せ。必要であれば次の記号を用いよ。

$$\phi_R = \phi(\boldsymbol{R}(t),t),\ \boldsymbol{A}_R = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}(t),t)$$

II.3 次のラグランジュ関数が導くオイラーラグランジュ方程式がII.2のニュートンの運動方程式と等しくなることを示せ。

$$L(\boldsymbol{R},\dot{\boldsymbol{R}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{R}}^2 - e\phi_R + e\boldsymbol{A}_R \cdot \dot{\boldsymbol{R}}$$

II.4 正準座標 $\boldsymbol{R}$ に共役な運動量 $\boldsymbol{P}$ をもとめよ。

II.5 ハミルトン関数をもとめよ。

II.6 電磁場のポテンシャルによる記述にはゲージ変換の自由度がある。これについて考えよう。

II.(6-1) $\boldsymbol{r}, t$ の任意の関数 $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ に対して、$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ としたとき、ポテンシャル $\boldsymbol{A}'$, ϕ' から導かれる電場 $\boldsymbol{E}'$ と磁場 $\boldsymbol{B}'$ が $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$ と $'$ なしのものと等しいことを示せ。

II.(6-2) $L' = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{R}}^2 - e\phi'_R + e\boldsymbol{A}'_R \cdot \dot{\boldsymbol{R}}$ として、$'$-系での作用積分 S' と $'$ なしの系での作用積分 S との差が定数のみであることを示せ。ここで運動の開始時刻 t_i, 終了時刻 t_f として $S = \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} dt\, L(\boldsymbol{R}(t), \dot{\boldsymbol{R}}(t))$, $S' = \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} dt\, L'(\boldsymbol{R}(t), \dot{\boldsymbol{R}}(t))$ である。

II.(6.3) II.(6.2) の結果を仮定し、$'$ なしの系の運動方程式と $'$-系の運動方程式にはどのような関係があるか述べよ。

III. 物理系の保存則について議論しよう。

III.1 循環座標と保存則の関係を説明せよ。

III.2 より一般に（ラグランジュ関数の）対称性と保存力の間にはネーターの定理と呼ばれる重要な関係がある。ここでは質量 m の質点のポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ 中での運動を考えよう。ここで $\boldsymbol{r}$ は質点の位置である。

III.(2-1) $V = 0$ の場合、系は空間の並進操作について不変であるが、この不変性に起因する保存則を結果のみ述べよ。

III.(2-2) $V(\boldsymbol{r}) = V(|\boldsymbol{r}|)$ という中心力による運動の場合の系の対称性とそこから導かれる保存則を結果を結果のみ述べよ。

III.(2-3) 系のエネルギー保存則をネーターの定理との関係で説明せよ。（導出は要求しない）