

幾何学的位相とゲージ場

初貝安弘（筑波大学）

概要

電磁気学の点電荷は基本的ですが、点磁化（単磁極）は未だ観測されていません。しかし理論的には、その存在は何ら否定されるものではなく、ディラックによると素電荷と“素磁化”の積はプランク定数の整数倍に量子化するとされます。この量子化の起源はゲージ場としての電磁場が量子力学に従う波動関数にもたらす位相の幾何学的な拘束条件にあって、このような位相を広く幾何学的位相といいます。最もよく知られた幾何学的位相は周期的な断熱過程に伴うベリー位相で対応するゲージ場をベリー接続といいます。このゲージ場は電磁場とは違って直接の観測量ではなく、量子論に限らず自然界に広く存在するにもかかわらずその意義が認識されていませんでした。このベリー接続で表されるザック位相やチャーン数も広義の幾何学的位相です。特に離散的な値しかとらない（量子化する）幾何学的位相は、近年広く興味を持たれているトポロジカル相のトポロジカル秩序変数として、系の境界で実験的に観測される局在状態の存在を预言します。この関係がバルクエッジ対応です。講演では、最初にディラック単磁極とベリー接続についてわかりやすく説明します。その後、ベリー接続がバルクエッジ対応を通して支配する現象を広く紹介します。量子（スピン）ホール効果、フォトニック結晶や細胞で観測される一方向のみの流れ、ワイル半金属のフェルミアーク、エルニーニョ現象、等々がその例です。ベリー接続のディラック単磁極は、これら多様な現象すべての源泉で、バルクエッジ対応を通して自然界に広く実在するのです。

1 ディラック単磁極

1.1 点電荷と単磁極

最初によく知られた点電荷の電磁気学を少し復習します。原点にある電荷 Q の点電荷が座標 $\mathbf{r}$ につくる電場はクーロンの法則から

$$\mathbf{E}_Q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r, \quad r = |\mathbf{r}|$$

となりますので、¹ $r \neq 0$ を仮定して具体的に計算すれば $\text{div } \mathbf{E}_Q = 0$ となるので、原点以外 ($r \neq 0$) では電荷は存在せず、更に原点を囲む (3 次元の) 単位球面 S^2 上で面積分して、ガウスの定理を使えば $\int_{S^2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_Q = \int_{B^3} dV \text{div } \mathbf{E}_Q = Q/\epsilon_0$ となることを電荷分布 $\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E}_Q = Q\delta(\mathbf{r})$ と表します。²通常の電磁気学では点電荷は基本的なものとされますが、対応する点磁化は存在しないと仮定されます。磁場を $\mathbf{B}$ とすると $\text{div } \mathbf{B} = 0$ は Maxwell 方程式の一部とされて基本法則とされています。これは、ひとえに実験的に点磁化が観測されていないためであって、理論的にはその存在を否定するものではありません。正負の同量の電荷が対を作るとき、全体の総電荷はゼロですが、対から十分に離れたところの電場はゼロではなく、電気双極子からの電場として理解できることはよく知られています。円電流からの磁場はこの電気双極子の電場と同じ距離依存性をもっていて円電流から十分に離れた場所では磁気双極子と見なせます。原点まわりの円電流は電子が円運動することに対応しますので電子の角運動量に帰着できます。磁石は原子の角運動量に起因する磁気双極子とみなせることもよくご存じでしょう。ただし、磁石には N 極と S 極があって磁石を 2 つに割ってもそれぞれに N 極と S 極が生まれて、必ず対になっているわけです。そこで、点磁化は以下単磁極と呼ぶことにしましょう。相対論的な量子力学の理論他、物理学に大きな業績を残したディラック (P.A.M Dirac) に従って、この単磁極の存在を仮定してその効果を議論しましょう [1, 2]。

¹ ϵ_0 は真空の誘電率

² B^3 は原点にある三次元球でその表面が S^2 。これを $\partial B^3 = S^2$ と書きます。

1.2 ディラック単磁極の量子化 [1, 2]

点電荷の議論を参考にして図のように原点に磁化 m を持つ単磁極があるとします。³

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{div } \mathbf{B} = m\delta(\mathbf{r}).$$

次に x 軸上正の場所にある電子銃 G から打ち出した電子波が 2 つのピンホールのいずれかを通り、 x 軸上負の場所にあるスクリーン上で観測する実験を考えましょう。この時スクリーン上の点 S で電子を観測する確率 P は、それぞれの経路を通る電子の波動関数の重ね合わせ状態として

$$P = |\psi_{GAS} + \psi_{GBS}|^2 \quad (1)$$

となります。 ψ_{GAS} と ψ_{GBS} はそれぞれの経路 GAS , GBS を通過する電子波の波動関数です。電子銃から電子を N 回打ち出したとき、スクリーン上 S で電子が M 回、観測されたとして $M/N \rightarrow P$ ($N \rightarrow \infty$) となるとされます。つまり P は観測可能な量です。電子の電荷を $-e$ として、 $\Phi_0 = h/e$ は磁束量子、 $\mathbf{A}$ は $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ を満たすベクトルポテンシャルとして電子波の波動関数は以下の定常状態のシュレディンガー方程式から定まります。⁴

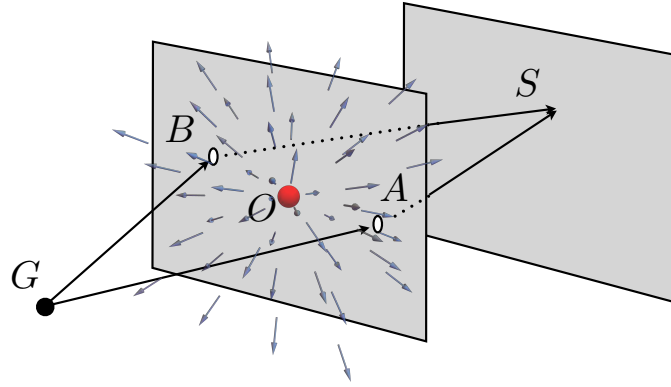


図 1: ディラック単磁極に関する思考実験。原点に強さ m の単磁極があるとき、電子銃 G から放出された電子は 2 つのピンホールのいずれかを通りスクリーン上の 1 点 S に到達するとします。電子波は 2 つのピンホールを通りスクリーン上で干渉し、その絶対値の 2 乗が S に電子が到達する確率を与えることになります。

$$H(\mathbf{A})\psi = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m}\psi = \frac{(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla + i2\pi\frac{\mathbf{A}(\mathbf{r})}{\Phi_0})^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (2)$$

ここで $\nabla(e^{-i\Theta(\mathbf{r})}\psi_0(\mathbf{r})) = e^{-i\Theta(\mathbf{r})}(-i\nabla\Theta + \nabla)\psi_0$ となりますので G から出発し $\mathbf{r}$ に至るある経路上 L をとったとき、 L 上の波動関数に関する $\mathbf{A}$ の効果は次のように位相に吸収できます。

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{-i\Theta_L(\mathbf{r})}\psi_0(\mathbf{r}), \quad \Theta_L(\mathbf{r}) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_G^{\mathbf{r}} d\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}})$$

この位相 $\Theta_L(\mathbf{r})$ は終点 $\mathbf{r}$ だけでなく、経路 L に依存して定まる量であることに注意しましょう。また $\psi_{GA(B)}^0$ は $\mathbf{A} = 0$ の時の (実の) 波動関数で単磁極の磁荷 m に依存しません。($H(\mathbf{0})\psi_0 = E\psi_0$)

よってそれぞれの経路 GAS と GBS を通ってスクリーン上の S に到達する電子波に関して単磁極の効果は次のように波動関数の位相に吸収できます。

$$\psi_{GA(B)S} = e^{-i\Theta_{GA(B)S}}\psi_{GA(B)S}^0, \quad \Theta_{GA(B)S} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{GA(B)S} d\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}).$$

³ $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$, $\nabla r^n = nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}}$, $\nabla r^{-1} = -r^{-2}\hat{\mathbf{r}}$, $\nabla \cdot (\mathbf{r}r^{-3}) = 3r^{-3} + \mathbf{r} \cdot (-3r^{-4}\hat{\mathbf{r}}) = 0$ より、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$, ($r \neq 0$).

⁴ここで同一の磁場 $\mathbf{B}$ を与えるベクトルポテンシャルは一意には定まらず、 χ を任意の関数としてゲージ変換とよばれる $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ だけの不定性があります ($\text{rot } \mathbf{A}' = \mathbf{B}$).

これから S での電子の観測確率 (1) は次のようになります

$$P = P_0 + 2\psi_{GAS}^0\psi_{GBS}^0 \cos \Theta(m), \quad \Theta(m) = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}. \quad (3)$$

ここで $C = GASBG$ は G, A, S, B, S, G の順に経路を一回りする向きのついた閉曲線で $P_0 = |\psi_{GAS}^0|^2 + |\psi_{GBS}^0|^2$ は m に依存しませんが $\Theta(m)$ は閉曲線 C に沿った線積分で定まる観測可能な物理量です。この Θ を次のようにストークスの定理を用いて 2 つの異なる面積分として 2 通りに計算することを考えます。

$$\Theta_{\cap} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{S_{\cap}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}, \quad \Theta_{\cup} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{S_{\cup}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}.$$

ここで $S_{\cap}$ と $S_{\cup}$ は共に向きを含めて境界を C とする面 ($C = \partial S_{\cap} = \partial S_{\cup}$) で、 $S_{\cap}$ は原点にある単磁極の上 (z 軸の正の部分) を通る面で $S_{\cup}$ は原点にある単磁極の下 (z 軸の負の部分) を通る面とします。⁵ 図の閉曲線 C に沿って単磁極の上と下を通るように膜を張るわけです。これから 2 通りに計算した位相の差はガウスの定理を用いて次のようになります。

$$\Theta_{\cap} - \Theta_{\cup} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{S_{\cup}-S_{\cap}} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_B d\mathbf{S} \cdot \text{div } \mathbf{B} = \frac{2\pi}{\Phi_0} m = 2\pi \frac{em}{h}$$

ここで B は $S_{\cap}$ と $S_{\cup}$ で挟まれた原点を囲む 3 次元的な領域です。また $\text{div } \mathbf{B} = m\delta(\mathbf{r})$ を用いました。ここで観測可能量 $\cos \Theta$ は経路のみで定まるはずで、計算に用いた膜の貼り方には依存しないはずですから $\cos \Theta_{\cap} = \cos \Theta_{\cup}$ が必要でこの条件は

$$\frac{em}{h} \in \mathbb{Z} \text{ (整数)}$$

となります。これがディラック単磁極の量子化です。

2 ベリー接続とディラック単磁極

2.1 ベリー接続とゲージ変換

ここで、話を全く変えて量子系のハミルトニアン H が何かパラメーターに依存している状況を考えます。ここでは、最も簡単な二準位系に対する次のハミルトニアンを考えましょう。

$$H(\mathbf{r}) = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \quad (4)$$

ここで σ_i , ($i = x, y, z$) はパウリ行列、 $\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列を成分とするベクトルです。 $\text{Tr} H = 0$, $H^2 = r^2 E_2$ となるので、固有エネルギーは $E_{\pm} = \pm r$ となり、 $r \neq 0$ である限り縮退はありません。⁶ ここで固有値 $E_{\pm}$ に対応する規格直交化された固有ベクトルを $|\psi_{\pm}(\mathbf{r})\rangle$, $\langle\psi_{\alpha}|\psi_{\beta}\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$, ($\alpha, \beta = \pm$), $H(\mathbf{r})|\psi_{\pm}(\mathbf{r})\rangle = |\psi_{\pm}(\mathbf{r})\rangle E_{\pm}(\mathbf{r})$ としましょう。以下、簡略化して $E = E_+ = r$ に対してのみ議論することにして固有値 $+r$ に対するベリー接続を議論します [3]。 $|\psi\rangle = |\psi_+\rangle$ に対して

$$\mathcal{A} = \langle\psi(\mathbf{r})|\nabla|\psi(\mathbf{r})\rangle = i\text{Im} \langle\psi(\mathbf{r})|\nabla|\psi(\mathbf{r})\rangle$$

⁵後で示すディラックストリング (ベクトルポテンシャルの特異性) によれば、 $S_{\cap}$ と $S_{\cup}$ 上では磁場を表現するベクトルポテンシャルには脚注 4 のゲージ変換だけの差があることになります。

⁶ E_2 は 2×2 の単位行列、2 つの三次元ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ について $(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})E_2 + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

をベリー接続といいます。なお、規格化条件を微分して $0 = \nabla \langle \psi | \psi \rangle = \langle \nabla \psi | \psi \rangle + \langle \psi | \nabla \psi \rangle = \mathcal{A}^* + \mathcal{A}$ から $\mathcal{A}$ は純虚数となることを用いました。最も基本的な幾何学的位相であるベリー位相はこのベリー接続を用いて $\gamma(C)$ は次のように定義されます。

$$i\gamma(C) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

ここで線積分の積分路 C はパラメータ空間内の閉曲線です。

ここで幾つかの注意が必要です。固有値問題の固有ベクトルは、一般にその位相は不定です。つまり $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ が規格直交化された固有ベクトルなら $\chi(\mathbf{r})$ を任意の（微分可能な）関数として $|\psi'(\mathbf{r})\rangle = |\psi(\mathbf{r})\rangle e^{i\chi(\mathbf{r})}$ も規格直交化された固有ベクトルになります。これについて同様にベリー接続を求めれば

$$\mathcal{A}'(\mathbf{r}) \equiv \langle \psi'(\mathbf{r}) | \nabla | \psi'(\mathbf{r}) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}) | \nabla | \psi(\mathbf{r}) \rangle + i \nabla \chi(\mathbf{r}) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) + i \nabla \chi(\mathbf{r})$$

となります。これは前節で議論した電磁場のゲージ変換（脚注 4）と虚数単位 i を除いて同じ形です。同じくゲージ変換といいます [3]。対応して、異なる位相の決め方（ゲージ）から計算したベリー位相 γ' は次のようになります。

$$i\gamma'(C) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}'(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) + i \oint_C d\mathbf{r} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}) = i\gamma(C) + i(\chi(\mathbf{r}(t_f)) - \chi(\mathbf{r}(t_i)))$$

ここで、閉曲線は $C = \{\mathbf{r}(t) | t \in [t_i, t_f]\}$ とパラメータ表示されているとしました。⁷ 位相因子 $e^{i\chi(\mathbf{r})}$ はパラメータ空間で一価関数ですので、 $e^{i\chi(\mathbf{r}(t_f))} = e^{i\chi(\mathbf{r}(t_i))}$ 、つまり $\chi(\mathbf{r}(t_f)) = \chi(\mathbf{r}(t_i)) + 2\pi n$ 、 n は整数となります。よって

$$\gamma(C) \equiv \gamma'(C), \quad \text{mod } 2\pi$$

とベリー位相は 2π の不定性を除いて一意的に定まります。

2.2 ゲージ固定

少し振り返るとベリー接続 $\mathcal{A}$ の定義には ∇ という $\mathbf{r}$ についての微分がありますので、固有ベクトルは $\mathbf{r}$ について微分できなければなりません。固有値問題は $\mathbf{r}$ ごとに独立していて、異なる $\mathbf{r}$ での固有値問題とは無関係ですので、固有ベクトルは $\mathbf{r}$ について滑らかである保証はありません。⁸ ベリー接続が意味を持つためには、逆にこの自由度をつかって波動関数の位相を滑らかに選ぶ必要があります。これをゲージを固定するといいます。この方法について次に説明しましょう [4, 5, 6, 7]。まず、 $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ は位相（ゲージ）に依存しますが（固有値に縮退がないこと、つまり $E(\mathbf{r}) \neq 0$ を仮定して）、固有値 E の固有空間への射影演算子 $P(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})\rangle \langle \psi(\mathbf{r})|$ はゲージに依存せず確定することに注意しましょう。⁹ 次に任意のベクトル $|\phi\rangle$ を選び、 $|\psi^\phi(\mathbf{r})\rangle = P(\mathbf{r})|\phi\rangle$ とすれば、これが固有ベクトルとなることはすぐわかります。また、 $P(\mathbf{r})$ が $\mathbf{r}$ について滑らかなら $|\psi^\phi(\mathbf{r})\rangle$ も滑らかとなります。ただし、このままでは規格化されていないので、次のように規格化しましょう。

$$|\bar{\psi}^\phi(\mathbf{r})\rangle = |\psi^\phi(\mathbf{r})\rangle / \sqrt{N^\phi(\mathbf{r})}, \quad N^\phi(\mathbf{r}) = \langle \psi^\phi(\mathbf{r}) | \psi^\phi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \phi | P(\mathbf{r}) | \phi \rangle = |\eta_\phi(\mathbf{r})|^2$$

⁷ 閉曲線ですから $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}(t_i)$ です。

⁸ 例えば、いま議論した $\chi(\mathbf{r})$ を各点ごとにランダムに選んだ場合などを考えてみてください。

⁹ $HP_\pm = P_\pm E_\pm$, $P_\pm^2 = P_\pm$, $P_+P_- = 0$ となることは簡単に確認できます。また、ハミルトニアン H の対角化から $H = E_+P_+ + E_-P_-$ となります。 $H(\mathbf{r})$ が $\mathbf{r}$ に対して滑らかなら $P(\mathbf{r})$ も滑らかとなります。ここで $E_+(\mathbf{r}) \neq E_-(\mathbf{r})$ つまり縮退がないことが重要です。

つまり、 $\eta_\phi(\mathbf{r}) \neq 0$ が、このゲージ固定が使えるための条件です。¹⁰ ベリー位相 $\gamma(C)$ はゲージに依存する量ですから、意味を持つためには、曲線 C 上で特定の $|\phi\rangle$ に対して常に $\eta_\phi \neq 0$, ($N(\mathbf{r}) \neq 0$), $\mathbf{r} \in C$ とゲージ固定ができることが必要です。¹¹

電磁場に倣ってベリー接続についても $\mathcal{A}$ はゲージ変換で変更を受けますが、対応する磁場 $\mathcal{B}$ を $\text{rot } \mathcal{A}$ と定めれば、これはゲージ不変な量となります。そこである閉曲面 S に対して、チャーン数 $C(S)$ を次のように定めます。

$$C(S) = \frac{1}{2\pi i} \int_S d\mathcal{S} \cdot \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A}$$

電磁気学の磁場 $\mathcal{B}$ と同じく、 $\mathcal{B}$ はゲージに依存しないので、チャーン数 $C(S)$ は、ベリー位相とは違ってゲージに依存しません。更に後述のように閉曲面 S に対して、チャーン数は常に整数の値をとるトポロジカル数となります。

2.3 二準位系のベリー接続

少し抽象的になってしまったので、今、与えた方法に従って、二準位系のハミルトニアン Eq.(4) に対して、具体的にベリー接続を求めてみましょう [7]。この時、 $H = r\frac{1}{2}(E_2 + r^{-1}H) - r\frac{1}{2}(E_2 - r^{-1}H)$ と変形できることに注意すれば、固有ベクトルを具体的に求めなくても射影演算子が次のように求められます。(下記の $|\psi_{\theta,\varphi}\rangle$ が固有ベクトルであることを $H|\psi_{\theta,\varphi}\rangle$ を計算して確認しても十分です。)

$$P = \frac{1}{2}(E_2 + r^{-1}H) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \hat{z} & \hat{x} - i\hat{y} \\ \hat{x} + i\hat{y} & 1 - \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

$$= |\psi_{\theta,\varphi}\rangle \langle \psi_{\theta,\varphi}|, \quad |\psi_{\theta,\varphi}\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

なお、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ で、3次元極座標 $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ を用いました。また、ゲージ固定のために $|\phi_N\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $|\phi_S\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の2通りを考えて $|\psi_N\rangle = P_+|\phi_N\rangle N_N^{-1/2}$, ($\langle \phi_N | P_+ | \phi_N \rangle = \frac{1}{2}(1 + \hat{z}) = \cos^2 \frac{\theta}{2}$), $|\psi_S\rangle = P_+|\phi_S\rangle N_S^{-1/2}$, ($\langle \phi_S | P_+ | \phi_S \rangle = \frac{1}{2}(1 - \hat{z}) = \sin^2 \frac{\theta}{2}$) となるので、2通りにゲージ固定した固有ベクトルは以下ようになります。

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + \hat{z})^{1/2} \\ (\hat{x} + i\hat{y})(1 + \hat{z})^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad |\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (\hat{x} - i\hat{y})(1 - \hat{z})^{-1/2} \\ (1 - \hat{z})^{1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

なお $|\psi_N\rangle = |\psi_S\rangle e^{i\varphi}$ にも注意しましょう。 $|\psi_N\rangle$ は半直線 $\hat{z} = -1, (x = y = 0, z < 0)$ 上で特異的となります。この特異点がつくる半直線はディラックストリングと呼ばれています。またこのゲージは原点中心の任意の半径の北極を含む北半球で正則ですので北極ゲージと呼びましょう。同様に $|\psi_S\rangle$ はディラックストリング $\hat{z} = +1$ 上で特異的で南半球で正則な南極ゲージです。¹² このゲー

¹⁰なお $\eta_\phi(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) | \phi \rangle$ は固有ベクトル $|\psi\rangle$ の位相に依存しますが、 $|\eta_\phi(\mathbf{r})|$ は依存しません。よって、ゲージ固定ができない点の条件 $\eta_\phi = 0$ もゲージには依存しません。

¹¹必ずしも $|\phi(\mathbf{r})|$ は定数である必要はありませんが、 C 上一価であることが必要です。

¹²一般のゲージ固定条件は $|\phi_{a,b}\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ に対して、例えば $|\psi_N\rangle$ を用いて $\eta_{a,b} = \langle \psi_N | \phi_{a,b} \rangle = a \cos \frac{\theta}{2} + b e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} = 0$ が $|\phi_{a,b}\rangle$ によるゲージ固定ができない点の条件となります。北極ゲージなら $\eta_{1,0} = \cos \frac{\theta}{2} = 0$ より $\theta = \pi$ が、ディラックストリング (ゲージ固定ができない点) となり、南極ゲージでは $\eta_{0,1} = e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} = 0$ より $\theta = 0$ が、ディラックストリングを与えます。

固定した波動関数を用いてベリー接続を計算すると次のようになります。¹³

$$\mathcal{A}_N = ie_\varphi \frac{1}{2r} \tan \frac{\theta}{2}, \quad \mathcal{A}_S = -ie_\varphi \frac{1}{2r} \cot \frac{\theta}{2}.$$

ここで $\mathcal{A}_N$ に対するディラックストリング（特異点）は $\theta = \pi$, $\mathcal{A}_S$ に対しては $\theta = 0$ と書けます。続けて $\mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A}$ を計算すれば、¹⁴

$$\mathcal{B} = \frac{i}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

よって原点中心の単位球面 S^2 に対するチャーン数は

$$C(S^2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{i}{2} \int_{S^2} d\mathbf{S} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = +1$$

となります。ここで電磁気学のディラック単磁極の議論を思い出せば

$$\mathbf{B} = \frac{m}{2\pi i} \mathcal{B}, \quad \mathbf{A} = \frac{m}{2\pi i} \mathcal{A}$$

となります。つまり、二準位系の固有状態に対するベリー接続は（虚磁荷の）ディラック単磁極を与えるのです。¹⁵ よってベリー位相については、

$$i\gamma(C) = \int_C d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_C d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{i}{2} \Omega(C)$$

となります。ここで $\Omega(C)$ は原点から曲線 C を見たときの立体角です。例えば C が赤道など大円の場合 $\Omega(C) = 2\pi$ となりますから $\gamma(C) = \pi$ となります。

3 バルクエッジ対応と幾何学的位相

3.1 幾何学的位相の量子化

ベリー位相はハミルトニアンがゆっくり時間依存する周期的過程において（断熱極限で）波動関数が十分に獲得する位相として M.V. Berry により見出されました [3]。¹⁶ その一方、近年のトポロジカル相の物理の発展の過程で、幾何学的位相はトポロジカル相を特徴付けるために有用であることが広く知られるようになりました。ベリー接続を用いて定義される幾何学的位相が量子化する、つまり不連続な値しか取り得ない場合、ベリー位相は注目している準位が他の準位と準位交差しな

¹³まず、極座標によると $\mathbf{e}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r} / |\partial_\alpha \mathbf{r}|$, $(\alpha = r, \theta, \varphi)$ として $\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi$ となります。

$$\begin{aligned} \nabla |\psi_N\rangle &= r^{-1} \mathbf{e}_\theta \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \begin{bmatrix} 0 \\ ie^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_N = \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{2r} \tan \frac{\theta}{2} \\ \nabla |\psi_S\rangle &= r^{-1} \mathbf{e}_\theta \begin{bmatrix} -e^{-i\varphi} \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \begin{bmatrix} -ie^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_S = -\mathbf{e}_\varphi \frac{i}{2r} \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

¹⁴極座標での $\text{rot } \mathbf{A}$ の公式 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\varphi A_\varphi$ に対して $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} [\partial_\theta (A_\varphi \sin \theta) - \partial_\varphi A_\theta] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} [\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi A_r - \partial_r (A_\varphi r)] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} [\partial_r (A_\theta r) - \partial_\theta A_r] \mathbf{e}_\varphi$ を用いて $\text{rot } \mathcal{A}_N = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta [\frac{i}{2r} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \sin \theta] \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r \frac{i}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin^2 \frac{\theta}{2} = i \frac{\hat{\mathbf{r}}}{2r^2}$ 。また $\text{rot } \mathcal{A}_S = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta [\frac{i}{2r} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \sin \theta] \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_r \frac{i}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} = i \frac{\hat{\mathbf{r}}}{2r^2}$ 。

¹⁵一般の準位交差も縮退点の十分近くでは、一般には他の準位はほとんど不動なので、実効的に二準位系と見なせます。

¹⁶時間をパラメータとみて各時刻ごとの（スナップショットの）固有値問題において、注目する孤立したエネルギー準位が他の準位と準位交差ししない時、注目する固有状態を初期値とする時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題の解（波動関数）はハミルトニアンの時間変化が準位間隔に比して十分にゆっくりな時（断熱極限といいます）にはスナップショットの波動関数に位相を除いて一致します（断熱定理）。

い限り、変化することができず、その意味で断熱不変量となります。多くの場合その量子化にはトポロジカルな理由¹⁷があるので、量子化する幾何学的位相はトポロジカル不変量とも呼ばれ、トポロジカル相を特徴付けることとなります。非自明なベリー接続は、ハミルトニアンがパラメーターに全く依存しない自明な状況から変形することで、準位交差を重ねて生まれてくると考えられ、この準位交差は二準位問題としてベリー接続が作るディラック単磁極で記述されます。つまり、すべての非自明な幾何学的位相の背後にはベリー接続のディラック単磁極が実在するのです。

以下 2 つの幾何学的位相の量子化について説明します。

3.1.1 チャーン数の量子化

上記 2×2 行列に関するベリー接続の議論を続ければ、北極と南極以外では $\mathcal{A}_N$ と $\mathcal{A}_S$ は特異性なく定義され $|\psi_N\rangle = |\psi_S\rangle e^{-i\varphi}$, $\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S = i\nabla\varphi$ となりますので、ディラック単磁極の議論にならって北半球 S_N^2 と南半球 S_S^2 を用いて、それぞれで正則なゲージ $\mathcal{A}_N$ と $\mathcal{A}_S$ を使って、それぞれでストークスの定理を使えば

$$\begin{aligned} C(S) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{S_N^2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} + \int_{S_S^2} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial S_N^2} d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}_N + \int_{\partial S_S^2} d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}_S \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial S_N^2} d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}_N + \int_{-\partial S_N^2} d\mathbf{r} \cdot \mathcal{A}_S \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_N^2} d\mathbf{r} \cdot (\mathcal{A}_N - \mathcal{A}_S) = +1 \end{aligned}$$

とチャーン数は常に整数となります。つまりチャーン数は無条件に量子化します [2, 5]。

3.1.2 対称性によるベリー位相の量子化

ベリー位相は一般に 2π の不定性を除いて任意の実数値をとり量子化しません。ただし、系に何か対称性があれば、その限りではなく、その最も古くよく知られた例は π または 0 に量子化する Zak 位相です [8] 対称性の制限下では、ベリー位相も量子化してトポロジカルな量となり得ます [6, 8, 9, 10]。例えば、時間反転対称性 $\Theta = K$ (複素共役) で不変なハミルトニアン H , $([H, \Theta] = 0)$ に対して、基底状態に縮退がなければ $|\psi\rangle$ が基底状態なら $|\psi^\Theta\rangle = \Theta|\psi\rangle$ も基底状態となりますが、ベリー位相は常に純虚数ですので $\mathbf{A}^\Theta = \langle\psi^\Theta|\nabla|\psi^\Theta\rangle = -\mathbf{A}$ となります。また $\mathbf{A}^\Theta$ が定めるベリー位相 γ^Θ も γ と同じ意味を持つはずですので $\gamma^\Theta = \gamma, (\text{mod } 2\pi)$ これから $\gamma = \pi, 0, (\text{mod } 2\pi)$ と量子化条件が従います。¹⁸

3.2 ラフリンの議論

(整数) 量子ホール効果は 1980 年に磁場下の 2 次元の電子系でクリッツィング等により発見された現象でホール伝導度 σ_{yx} が e^2/h を単位に高い精度で整数値に量子化する現象です [11]。今日ではその量子化の一つの起源はホール伝導度がトポロジカル数であるチャーン数で与えられることとされ、量子ホール相はトポロジカル相の最初の例とされています [12, 13, 5]。一つのと述べたのには理由があって、ホール伝導度の量子化の理由は上記の議論より以前に（というか最初に）ラフリンにより、系のゲージ対称性があると指摘されました [14]。その時に使われた設定が図 2(a) に示すようなシリンダーの配置で、2 次元電子はシリンダーの表面に住んでいるとしました。その詳細はここでは述べませんが、見てわかるようにシリンダーは図 2(b) に示すトーラスを縦に切れ目

¹⁷ベリー位相の積分経路やチャーン数の積分領域を連続に変形しても変化しないものを対象にする幾何学が位相幾何学 (トポロジー) ですが、ベリー接続の立場からは量子化する量はトポロジカルな意味をもつこととなります。

¹⁸ $H = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ が複素共役操作で不変ということは σ_y を含まないということです。 $\mathbf{r}$ は x - z 平面内にあることになります。よって積分路が原点を囲めば立体角 $\Omega(C) = 2\pi$ 、囲まなければ $\Omega(C) = 0$ となり $\gamma(C) = 0, \pi$ となります。

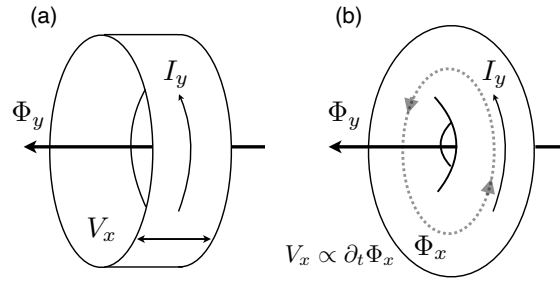


図 2: ラフリンの議論とバルクエッジ対応

をいれて切り開くことで構成できますので、本質的に境界（エッジ）をもつ系の議論になっています。ラフリンの論文にはエッジや境界という表現はありませんが、ハルペリンによって、この系の議論の本質がシリンダーの境界に局在したエッジ状態であると指摘されました [15]。最初に説明したチャーン数によるトポロジカル数の議論は図 2(b) のような境界をもたない系での議論で行われバルクの議論とされます。このように量子ホール効果に関してバルクによる議論とエッジ状態による議論の 2 通りの議論があることとなりますが、実はこの 2 つの議論はトポロジカル数のレベルで同値、つまり、ラフリン-ハルペリンの議論に現れるエッジ状態の寄与はチャーン数そのものであることを示すことができます [16]。このようなバルクのトポロジカル数とエッジ状態の（符号付きの）個数の関係を「バルクエッジ対応」とよびます。

3.3 短距離もつれ状態とベリー位相

前節で説明したバルクエッジ対応はバルク境界対応として一般化され、自然界に存在する局在状態の起源を境界を持たないバルクの特性に帰着して理解する視点として、その適用範囲は広く広がっています。その典型例がポリアセチレンのソリトンと呼ばれる局在状態です [17]。これは 2 量体化（ダイマー化）したポリアセチレンのダイマー状態のキンクに束縛されたバンドギャップ内の状態ですが、その起源をキンクの無い無限に広がったダイマー状態の特性に帰着する視点です [9]。弱く 2 量体化した状態はバンドギャップ（多体問題の励起ギャップ）を閉じずに孤立したダイマーの集合に分離できます。このように励起ギャップが有限で縮退のない多体状態の中で上手く変形することで全系を孤立した局所的なクラスター（ダイマーなど）の集合に励起ギャップを閉じずに変形できる場合を短距離もつれ状態と呼びましょう。弱くダイマー化したポリアセチレンやスピン 1 のハイゼンベルグ鎖（ハルデン系）等がその例です。ダイマーなど孤立クラスターは一般にクラスター境界のサイトに関する局所的なゲージ変換に起因するベリー位相で特徴付けることができます [18, 19]。¹⁹ このようなベリー位相は一般に量子化しませんが、前節で説明したような付加的な対称性を系がもつとき、短距離もつれ状態を定義する際のギャップをとじない断熱変形に対して、不変なトポロジカル不変量となります。この時、系がクラスターを壊すような境界をもてば、境界をもつ系は局在状態をもつことが強く示唆されます。つまり、量子化するベリー位相をトポロジカルな秩序変数とする対称性に保護されたトポロジカル相を考えることができ、境界に存在する局在状態は「一般化されたバルクエッジ対応」従う観測量になるのです。近年興味を持たれている高次トポロジカル相などが、その例です [20]。

¹⁹ 電子が作る二量体のハミルトニアンを $H_0 = a^\dagger b + b^\dagger a$ とするとき $U a U^\dagger = e^{i\theta} a$ とするユニタリ変換 $U(\theta)$ を考え $H(\theta) = U(\theta) H_0 U^\dagger(\theta)$ に対するベリー位相がその例となります。このダイマー以外に孤立したダイマーが多数存在する多体問題に関しても、多体状態のベリー位相は自明にこの単一ダイマーのものと一致します。

3.4 バルクエッジ対応の普遍性

近年のトポロジカル相に関する活発な研究の成果として量子ホール効果を通して見出された「バルクエッジ対応」は、実は量子系に限らず、広く自然界の多くの現象に適用可能である普遍的な概念であることが広く知られるようになりました。周期的な誘電体中の古典電磁場である磁気フォトニック結晶における系の境界で一方にのみ流れる電磁場の存在のバルクのチャーン数からの予言とその観測は、古典系でバルクエッジ対応の最初の例で、今となってはある種、当然²⁰とも考えられますが、当時は確かに大きな驚きでした [21, 22, 23]。

最後にバルクエッジ対応としてバルクの特長から理解できる境界に局在する（広義の）エッジ状態の関連する現象を列挙し、講義では可能な範囲で説明します。また、物理学の問題としては、具体的な系が与えられた時、チャーン数や量子化するベリー位相の量子化値を計算することも重要となります。その際の有用な公式も現在では知られています [24, 18]。²¹

まずは、チャーン数をバルクのトポロジカル数とする現象、エッジ状態として（例えば）

- 量子ホール効果 [5, 12, 13, 16]
- 量子スピンホール効果 [25, 26]
- トポロジカルフォトニクス [27]
- ワイル半金属のフェルミアーク [28] とフォトニック結晶での類似現象 [29]
- メカニカルグラフェン [30] などトポロジカル力学系 [31]
- 電気回路でのカイラルエッジ状態などトポロジカル電気回路 [20, 32]
- 2次元上に配置したジャンケンゲーム [33]
- 生体細胞内の一方向の物質流 [34]
- トポロジカルポンプ [35, 36, 37] …
- エルニーニョ現象に関連する赤道付近の気流と海流 [38] …

量子化ベリー位相をバルクのトポロジカル数とする現象、エッジ状態として（例えば）

- ポリアセチレンのソリトン [17]
- スピン 1 のハイゼンベルグ鎖 (Haldane 鎖) [39, 40, 41, 42]
- グラフェンジグザグ端の藤田状態 [9, 43]
- d 波超伝導体のアンドレーフ束縛状態 [44, 45]
- 量子系、古典系の高次トポロジカル相 [46, 47, 48]
- 伝導率の異なる結合系の熱伝導現象 [49] …

トポロジカル相の物理は 1980 年の量子ホール効果の発見に端を発して、以後大きく発展してきました。その多くの系において、バルクのトポロジカル量は直接の観測量ではなく、バルクエッジ対応に従う局在状態としての広義のエッジ状態を観測して、多くの系がトポロジカルに非自明であるとされています。量子ホール効果はいわば例外でかつすべてが綺麗に理解でき観測できる理想的な系であったわけです。量子ホール効果のバルクエッジ対応はラフリンの議論を背景として、大きなゲージ対称性（large gauge transformation）が理論的な礎です。つまり、いわゆる電磁場と電子のミニマル結合 Eq.(2) に帰着します。これは微分演算子の置き換え $\nabla \rightarrow \nabla + i2\pi \frac{\mathbf{A}}{\phi_0}$ とそれが作用する関数の位相変換（複素化）であって、古典電磁場や力学系などの古典系の支配方程式においても類似の置き換えを行うことが可能です。ただし、電磁場の時のような電荷は実際には存在し

²⁰バルクエッジ対応の概念が広く知られるに至ったからでしょうか

²¹数値計算では誤差がありますので、実数値を多数加えた後で 3.0000 等となることはめったにないですが、この公式によると気持ちよくほぼ整数になります。是非お試しください。

ない（少なくとも観測されたことはない）ので、仮想的な電磁場に対するゲージ変換となります。よってこの仮想電磁場を直接観測する手段はありません。ただし、仮想電磁場との結合に基づくラフリンの議論や断熱変形が導く、エッジ状態は仮想的なものではなく、考えている実際の物理系の局在した観測量となるわけです。

振り返ると量子ホール効果の発見以来、この 40 年にわたるトポロジカル相の物理の研究を通して我々が学んだことは、種々の物理現象で観測される局在状態の背後には一般には必ずしも観測にかからない隠れたゲージ場とバルクの非自明な幾何学的位相（トポロジカル量）が存在するという普遍的な視点なのです。これがバルクエッジ対応です。

参考文献

- [1] P. A. M. Dirac. *Proc. R. Soc. A* 133, 60 (1931).
- [2] T. T. Wu and C. N. Yang. *Phys. Rev. D* 12, 3845 (1975).
- [3] M. V. Berry. *Proc. R. Soc. A* 392, 45 (1984).
- [4] Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.* 73, No. 10, 2604 (2004).
- [5] M. Kohmoto. *Annals of Physics* 160, No. 2, 343 (1985).
- [6] Y. Hatsugai. *J. Phys. Soc. Jpn.* 75, 123601 (2006).
- [7] Y. Hatsugai. *New Journal of Physics* 12, No. 6, 065004 (2010).
- [8] J. Zak. *Phys. Rev. Lett.* 62, 2747 (1989).
- [9] S. Ryu and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Lett.* 89, 077002 (2002).
- [10] Y. Hatsugai and I. Maruyama. *EPL (Europhysics Letters)* 95, 20003 (2011).
- [11] K. V. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. *Phys. Rev. Lett.* 45, 494 (1980).
- [12] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. *Phys. Rev. Lett.* 49, 405 (1982).
- [13] Q. Niu, D. J. Thouless, and Y. S. Wu. *Phys. Rev. B* 31, 3372 (1985).
- [14] R. B. Laughlin. *Phys. Rev. B* 25, 2185 (1985).
- [15] B. I. Halperin. *Phys. Rev. B* 25, 2185 (1982).
- [16] Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Lett.* 71, 3697 (1993).
- [17] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. *Phys. Rev. Lett.* 42, pp. 1698–1701 (1979).
- [18] T. Hirano, H. Katsura, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B* 78, 054431 (2008).
- [19] T. Kariyado and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B* 90, 085132 (2014).
- [20] H. Araki, T. Mizoguchi, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. Res.* 2, 012009 (2020).
- [21] F. D. M. Haldane and S. Raghu. *Phys. Rev. Lett.* 100, 013904 (2008).
- [22] Z. Wang, Y. D. Chong, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić. *Phys. Rev. Lett.* 100, 013905 (2008).
- [23] Z. Wang, Y. Chong, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić. *Nature* 461, No. 7265, 772 (2009).
- [24] T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki. *J. Phys. Soc. Jpn.* 74, 1674 (2005).
- [25] C. L. Kane and E. J. Mele. *Phys. Rev. Lett.* 95, 146802 (2005).
- [26] B. A. Bernevig and S.-C. Zhang. *Phys. Rev. Lett.* 96, 106802 (2006).
- [27] T. Ozawa, et al. *Rev. Mod. Phys.* 91, 015006 (2019).
- [28] S.-Y. Xu, et al. *Science* 349, No. 6248, 613 (2015).
- [29] S. Oono, T. Kariyado, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. B* 94, 125125 (2016).
- [30] T. Kariyado and Y. Hatsugai. *Scientific Reports* 5, 18107 (2015).
- [31] S. D. Huber. *Nature Physics* 12, 621 (2016).
- [32] V. V. Albert, L. I. Glazman, and L. Jiang. *Phys. Rev. Lett.* 114, 173902 (2015).
- [33] T. Yoshida, T. Mizoguchi, and Y. Hatsugai. *Phys. Rev. E* 104, 025003 (2021).
- [34] L. Yamauchi, T. Hayata, M. Uemachi, T. Ozawa, and K. Kawaguchi. *arXiv:2008.10852* (2020).
- [35] D. J. Thouless. *Phys. Rev. B* 27, 6083 (1983).
- [36] Y. Hatsugai and T. Fukui. *Phys. Rev. B* 94, 041102 (2016).
- [37] Y. Hatsugai and Y. Kuno. *arXiv:2210.11646* (2022).
- [38] P. Delplace, J. B. Marston, and A. Venaille. *Science* 358, 1075 (2017).
- [39] F. Haldane. *Physics Letters A* 93, 464 (1983).
- [40] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki. *Phys. Rev. Lett.* 59, 799 (1987).
- [41] T. Kennedy. *J. Phys. Condens. Matter* 2, 5737 (1990).
- [42] M. Hagiwara, et al. *Phys. Rev. Lett.* 65, 3181 (1990).
- [43] M. Fujita, K. Wakabayashi, K. Nakada, and K. Kusakabe. *J. Phys. Soc. Jpn.* 65, 1920 (1996).
- [44] C. Hu. *Phys. Rev. Lett.* 72, 1526 (1994).
- [45] Y. Tanaka and S. Kashiwaya. *Phys. Rev. Lett.* 74, 3451 (1995).
- [46] W. A. Benalcazar, B. A. Bernevig, and T. L. Hughes. *Science* 357, No. 6346, 61 (2017).
- [47] S. Hayashi. *Rev. Math. Phys.* 29, 1750033 (2017).
- [48] K. Hashimoto, X. Wu, and T. Kimura. *Phys. Rev. B* 95, 165443 (2017).
- [49] T. Yoshida and Y. Hatsugai. *Scientific Reports* 11, 888 (2021).