幾何学的位相とゲージ場

2大ばなし

↓

ベリー接続というゲージ場の紹介

前半

ベリー接続をどうやって"みる"(観測するか?)

バルクエッジ対応によって"みる"

(トポロジカル相)

後半

U(1)

ゲージ場について

幾何学的位相とゲージ場

量子力学 $i\hbar\frac{d}{dt}\psi = H\psi$

$$\Psi(t) = e^{i\Theta}\psi$$

時間依存性

Θ：何か系の幾何学的な構造に帰着する位相

電磁気学

Maxwell方程式

$\vec{E}(\vec{r})$：電場

$B(\vec{r})$：磁場

field

(実)空間 $\vec{r}$ ごとに定まる

点

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$(\vec{E} = \partial_t\vec{A} - \nabla\phi)$　$\vec{A}$：ベクトルポテンシャル

ϕ：スカラー　〃

これらは $\vec{r}$ 依存：“場”

ゲージ変換　　　　変換する

$\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\chi$　　$\vec{A}$：ゲージ場

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{B}' \quad (\nabla\times\nabla\chi = 0)$$

ゲージ不変

ゲージ場

Maxwell eq. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$: $\vec{A}$: U(1) ゲージ場

U(1)? "量子力学"

関数

c.f 数 → 数

$H\psi = E\psi$ (シュレディンガー方程式)

$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$, $\vec{p} = -i\hbar\nabla$: 演算子: 関数 → 関数

運動量を ↗ 作用

電磁場中の量子力学?

ローレンツ力による電子の運動(古典力学)

$m\ddot{\vec{r}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ $\quad \vec{p} \to \vec{p} + e\vec{A}$ とでお

量子力学 $\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla + e\vec{A})^2 + V(r)\right]\psi = E\psi$

$\vec{A}$ がない!

$$\psi = e^{-i\frac{e}{\hbar}\int^{\vec{r}} d\vec{\ell}\cdot\vec{A}}\,\psi_0$$ とすると $$(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A})\psi = e^{-i\frac{e}{\hbar}\int^{\vec{r}} d\vec{\ell}\cdot\vec{A}}\,(-i\hbar\vec{\nabla})\psi_0$$

$$-i\hbar\vec{\nabla}\, e^{-i\frac{e}{\hbar}\int^{\vec{r}} d\vec{\ell}\cdot\vec{A}} = (-i)^2 e\vec{A}\, e^{-i\cdots}$$

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A})^2+V(r)\right]\psi = e^{-i\frac{e}{\hbar}\int^{\vec{r}} d\vec{\ell}\cdot\vec{A}}\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2+V\right]\psi_0$$

ψ_0 を $\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2+V\right]\psi_0 = E\psi_0$ とすれば

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla}+e\vec{A})^2+V(r)\right]\psi = E\psi$$

$$|e^{-i\Theta}|^2 = 1$$

$$\psi = e^{-i\Theta(\vec{r})}\,\psi_0$$ と A の効果は位相に吸収

ψ_0 ← $A=0$

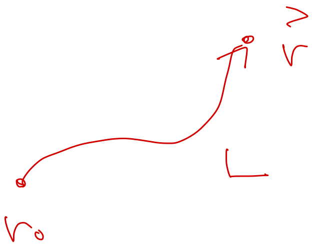
位相 ← $U(1)$

$$\psi(r) = e^{-i\Theta(r)}\,\psi_0(r) \quad \leftarrow \text{“}\vec{A}=0\text{”}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \frac{e}{\hbar} = \frac{e}{h/2\pi} = 2\pi\frac{e}{h} = 2\pi\frac{1}{\Phi_0}$$

$\Phi_0 = \dfrac{h}{e}$ 磁束量子

ただし $$\Theta(r) = \frac{e}{\hbar}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{l}) = 2\pi\frac{\Phi(\vec{r})}{\Phi_0}$$



$$\Phi(\vec{r}) = \int_{r_0}^{\vec{r}} d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{l})$$

$\boxed{\text{経路依存!}}$

曲線 L: $\{\vec{l} \mid \vec{l} = \vec{l}(t),\ t : t_i \to t_f\}$

$\vec{l}(t_i) = r_0,\quad \vec{l}(t_f) = \vec{r}$

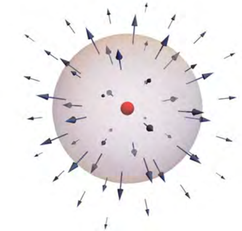
「ゲージ場について続」

※ Dirac 単磁極 について

モノポール

monopole

ディラック単磁極　Dirac monopole



電磁気学

① 点電荷　クーロンの法則

$+Q \qquad +Q$, r

$F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}$　反発

点電荷による電場 $\vec{E}(\vec{r})$

Q

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \text{：単位ベクトル}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

ガウスの定理

$$\int_{B(R)} dV\, \nabla\cdot E = \int_{\partial B = S} d\vec{S}\cdot\vec{E} = 4\pi R^2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$S(R)$

半径 R の球面　$S(R) = \{\vec{r} \mid |\vec{r}| = R\}$

任意の半径 R の対して成立

$\partial B = S$　$B(R)$ ボール $= \{\vec{r} \mid |\vec{r}| \leq R\}$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \partial_i \underbrace{(r_i r^{-3})}, \quad \partial_i (r_i r^{-3}) = \delta_{ii} r^{-3} + r_i(-3 r^{-4} \partial_i r)$$

$$= 3 r^{-3} - 3 r_i r^{-4} r_i r^{-1}$$

$$= 3 r^{-3} - 3 r^2 r^{-5} = 0, \quad r \neq 0$$

$$\partial_x r = \partial_x \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \partial_x (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(\ )^{-1/2} 2x = x/r \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad r \neq 0$$

$$\partial_i r = r_i r^{-1}$$

$$\begin{cases} \int_{B(R)} dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad r \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = Q\delta(\vec{r}), \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

点電荷!

(1) 単磁極

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\frac{m}{r^2}\hat{r} \quad , \quad \text{cf. } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

点電荷

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (r \neq 0)$ OK. Maxwell eq.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = m\,\delta(\vec{r})$

点磁荷

$+Q$

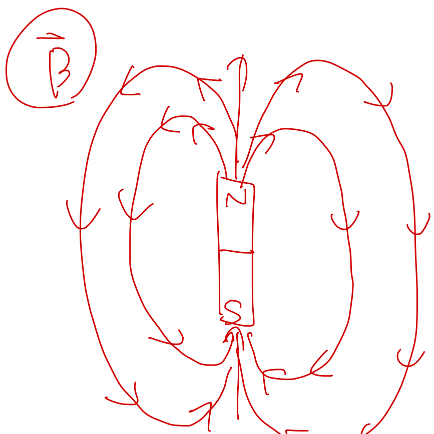
r

$-Q$

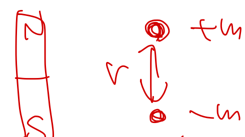
$Qr = \mu \; (r \to 0)$

電気双極子

$\vec{B}$



磁石 : 磁気双極子 (十分に小さい磁石)

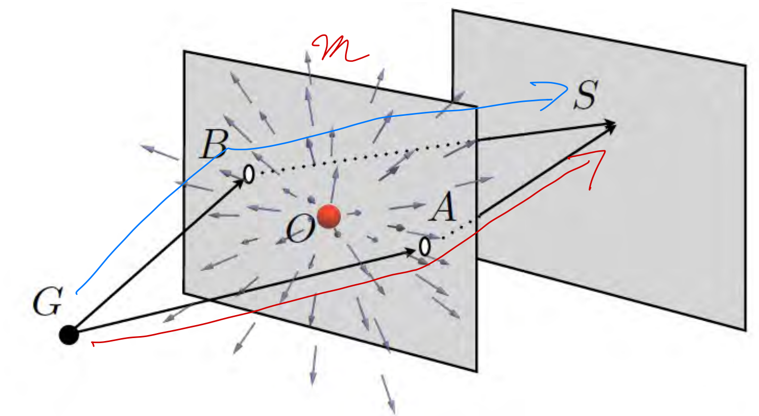


$\mu = m r \quad , \quad r \to 0$

点磁化 = 単磁極 (Dirac)

実験的にみつかっていない!!

単磁極の近くを通過する電子への影響 (Dirac)



$$\Psi_{GAS} = e^{-i\Theta_{GAS}}\,\Psi^0_{GAS}$$

$$\Psi_{GBS} = e^{-i\Theta_{GBS}}\,\Psi^0_{GBS}$$

磁場無しの時

mによらない定数

Sで電子を観測する確率 $P = |\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$

$$= |\Psi_{GAS} + \Psi_{GBS}|^2$$

$$= |\Psi^0_{GAS}|^2 + |\Psi^0_{GBS}|^2 + \Psi^*_{GAS}\Psi_{GBS} + \Psi^*_{GBS}\Psi_{GAS}$$

$$= \Psi^0_{GAS}\Psi^0_{GBS} \propto \cos(\Theta_{GAS} - \Theta_{GBS}) + \text{const.}$$

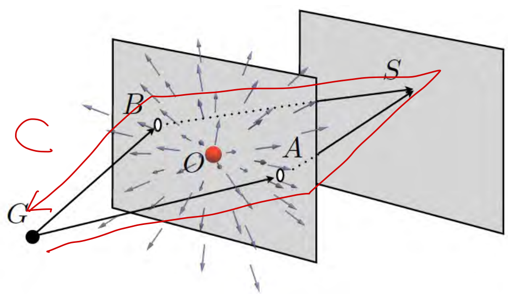
$$\Theta_{GAS} - \Theta_{GBS} = 2\pi \frac{1}{\Phi_0}\left(\int_{GAS} d\vec{l}\cdot\vec{A} - \int_{GBS} d\vec{l}\cdot\vec{A}\right)$$

歴史的依存
幾何学的

φ 位相の例

$$= 2\pi \frac{1}{\Phi_0}\oint_{GASBG=C} d\vec{l}\cdot\vec{A} = 2\pi\frac{1}{\Phi_0}\int_S d\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$\partial S = C$　曲線 C にそって膜をはる "S"



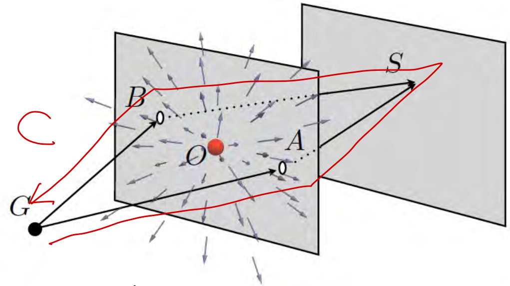
$$\Phi = \int_S d\vec{S}\cdot\vec{B}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

磁束　　磁場

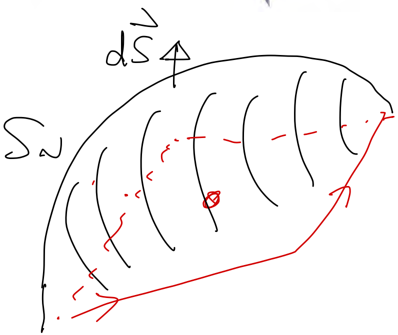
閉曲線 C を通る全磁束 Φ

$$\Delta P = \mathrm{Re}\, e^{i2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

m に依存する確率 ← "Φ"

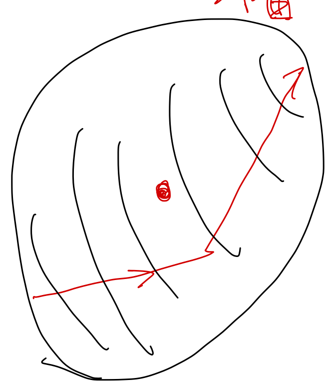


$$\Delta P = R e^{i2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} = R e^{i2\pi \frac{\Phi_N}{\Phi_0}} = R e^{i2\pi \frac{\Phi_S}{\Phi_0}}$$

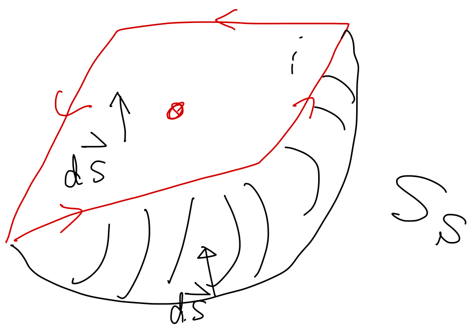


2通りの膜の張り方

$$S_N - S_S \simeq S^2$$



$$\Phi_N = \int_{S_N} d\vec{S}\cdot\vec{B}$$



$$\Phi_S = \int_{S_S} d\vec{S}\cdot\vec{B}$$

$$\Phi_N - \Phi_S = \int_{S^2} d\vec{S}\cdot\vec{B} = 2\pi\Phi_0 \times \overset{n}{整数}$$

⇒ 膜の張り方にPは依存しない!

$$\Phi_N - \Phi_S = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_B dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = m \int_B dV\, \delta(\vec{r}) = m$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$m = 2\pi \Phi_0 n = 2\pi \frac{\hbar}{e} \times n$$

$$\frac{me}{\hbar} = n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

U(1)ゲージ場　　Dirac monopole の量子化条件.

しかし電磁気学の

Dirac monopole は実験的にみつかっていない！

残念，…でも…

⑥ ベリー接続とディラック単磁極

ベリー接続 Berry connection Berry '84

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ シュレディンガー方程式

固有値問題

パラメータ依存とする $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) = (x, y, z) = \vec{r}$

$$H(\vec{r})|\psi(\vec{r})\rangle = E(\vec{r})|\psi(\vec{r})\rangle$$

パラメータ微分

$$\vec{A}(\vec{r}) = \langle\psi(\vec{r})|\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\rangle$$: ベリー接続

$\vec{r}$ 依存 : "場", field.

ex) $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ → 固有値 ± 1. 固有値 1 について考える.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y &= x \\ x &= y. \end{aligned}$$

$\therefore \begin{cases} x = 1 \to y = 1 & \text{規格化して} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2} \\ x = -1 \to y = -1 & 〃 \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} / \sqrt{2} \\ x = e^{i\theta} \to y = e^{i\theta} & 〃 \quad \begin{bmatrix} e^{i\theta} \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} / \sqrt{2} \end{cases}$

規格化しても位相は定まらない!

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ $\quad\quad$ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ 規格化

$\times e^{i\theta} \quad\quad \times e^{i\theta}$

$$H\left(|\psi\rangle e^{i\theta}\right) = E\left(|\psi\rangle e^{i\theta}\right)$$

$|\psi'\rangle = |\psi\rangle e^{i\theta}$ に対して

$$H|\psi'\rangle = E|\psi'\rangle$$

$$A' = \langle\psi'|\vec{\nabla}\psi'\rangle = e^{-i\theta}\langle\psi|\vec{\nabla}\overbrace{\left(|\psi\rangle e^{i\theta}\right)}^{|\nabla\psi\rangle e^{i\theta} + |\psi\rangle(i\vec{\nabla}\theta)e^{i\theta}}$$

$$= e^{-i\theta}\langle\psi|\nabla\psi\rangle e^{i\theta} + e^{-i\theta}\langle\psi|\psi\rangle(i\nabla\theta)e^{i\theta}$$

$$= \langle\psi|\nabla\psi\rangle + i\nabla\theta$$

$$= A + i\nabla\theta$$

新しいゲージ変換

(c.f. Maxwell

$A \to A' = A + \nabla\chi$)

$\vec{r}$ を x と書いた

$$H(x)\,|\psi(x)\rangle = E(x)\,|\psi(x)\rangle$$

$$|\psi(x)\rangle \to |\psi'(x)\rangle = |\psi(x)\rangle e^{i\theta(x)}$$

$$A(x) \to A'(x) = A(x) + \nabla\theta$$

$|\psi\rangle$ 波動関数の位相変換：パラメータごとに任意

$\theta(x)$ x依存

（実は x についてなめらかである必要もない）

$\downarrow$

$A = \langle\psi|\nabla\psi\rangle$ のゲージ変換

$A = \langle \psi | \nabla \psi \rangle$: ゲージ場 (ベリー接続)

特に $\langle \psi | \psi \rangle = 1 \Rightarrow \langle \nabla \psi | \psi \rangle + \langle \psi | \nabla \psi \rangle = 0$

$\left(\langle \psi | \nabla \psi \rangle \right)^{*} \rightarrow \mathrm{Re} \langle \psi | \nabla \psi \rangle = 0$ $\quad = \mathrm{Re} A$

$\langle \psi | \nabla \psi \rangle = i \times$ 実数, 純虚数

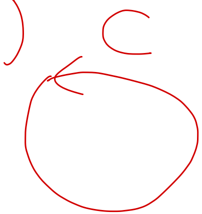
$A = i \, \mathrm{Im} \langle \psi | \nabla \psi \rangle$ とかける

御利益 $\langle \psi | \nabla \psi \rangle$ を計算する時 実数部分は無視によい…

例1 ベリー位相 γ　　パラメター空間内の任意の閉曲線 C に対して

$$i\gamma(C) \equiv \oint_C d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{l}) ,\quad \overbrace{\vec{A} = \langle\psi|\nabla\psi\rangle}^{\text{ゲージ依存量}}$$

例)



ゲージ変換の影響？

$$i\gamma' = \oint_C d\vec{l}\cdot\vec{A}' = \oint_C d\vec{l}\cdot(\vec{A}+i\nabla\theta) = \overbrace{\oint_C d\vec{l}\cdot\vec{A}}^{i\gamma} + i\oint_C d\vec{l}\cdot\nabla\theta$$

$$\gamma' = \gamma + \underbrace{\oint_C d\vec{l}\cdot\nabla\theta}_{2\pi\times\text{整数}}$$

← $e^{i\theta}$ はパラメター空間内で一価

$$\gamma' \equiv \gamma \mod 2\pi$$

ベリー位相は 2π×整数の不定性を持つ

mod 2π で一意に決まる

対称性によるベリー位相の量子化

例　時間反転 $T = UK$ (U：ユニタリ，K：複素共役) で不変の時

　← パラメーターに依存しない

$$[H, T] = 0$$

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \rightarrow |\psi^T\rangle = T|\psi\rangle = U|\psi\rangle^*, \quad H|\psi^T\rangle = E|\psi^T\rangle$$

$$A^T = \langle\psi^T|\nabla\psi^T\rangle = {}^*\langle\psi|\nabla\psi\rangle^* = (\langle\psi|\nabla\psi\rangle)^* = A^* = -A \quad (A：純虚)$$

$$i\gamma^T = \oint d\vec{l} \cdot \vec{A}^T = -\oint d\vec{l} \cdot \vec{A} = -i\gamma$$

$$\gamma^T = -\gamma \equiv \gamma \mod 2\pi \Rightarrow \gamma = 0 \text{ or } \pi \mod 2\pi$$

量子化

#2 チャーン数 C

パラメター空間内の任意の閉曲面(球面みたいなもの)S

に対して

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_S d\vec{S}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times A,\quad \vec{A} = \langle\psi|(\vec{\nabla}\psi)\rangle$$

仮想磁場

$$\vec{A}' = \vec{A} + i\nabla\theta$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = B'$$

ゲージ不変量

実は C は必ず整数[5] 量子化

量子化する物理量

チャーン数　　　整数

量子化ベリー位相　0 or π　mod 2π

物理系に対する小さなしかし有限の摂動に対して安定

→ トポロジカル不変数

◎ゲージ固定 [4] Y.H

$\vec{A} = \langle\psi|\vec{\nabla}\psi\rangle$，たとえば $A_x = \underbrace{\langle\psi|\partial_x\psi\rangle}_{\text{微分！}}$

$$\partial_x|\psi\rangle = \lim_{\vec{r}'\to\vec{r}} \frac{1}{\partial x}\left\{|\psi(\vec{r}')\rangle - |\psi(\vec{r})\rangle\right\}$$

パラメータ空間の異なる点

位相変換 $|\psi'\rangle = |\psi\rangle e^{\theta(x)}$

$\theta(x)$ は x について"メチャクチャ"でもよい

→ 当然微分できない！

なめらかにする方法 = ゲージ固定

① なんでもよいので固有ベクトルを得る $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

$|\psi\rangle$：位相は不定

② 固有ベクトルの空間への射影演算子 $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ をつくる

$P = |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi'\rangle\langle\psi'| = P'$ ：ゲージに依存しない！

③ 任意の状態 $|\phi\rangle$ を選ぶ（たとえば定ベクトル）

④ $|\psi^0\rangle = P|\phi\rangle$ とすると $|\psi^0\rangle$ は固有ベクトル

$$H|\psi^0\rangle = HP|\phi\rangle = H(|\psi\rangle\langle\psi|)|\phi\rangle = E|\psi\rangle\cdot(\langle\psi|\phi\rangle)$$
$$= EP|\phi\rangle = E|\psi^0\rangle$$

⑤ $|\psi^0\rangle$ を規格化する

$$|\psi_\phi\rangle = |\psi^0\rangle/\sqrt{N}, \quad N = \langle\psi^0|\psi^0\rangle = \langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

おつかれさまです

例でやってみます

$$H(\vec{r}) = H(x,y,z) = \begin{bmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{bmatrix}$$

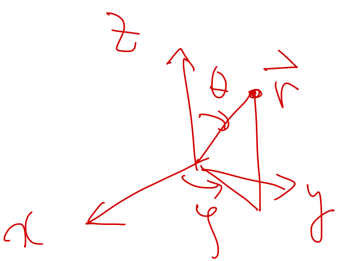
Berry '84

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, E = 固有値 $\pm r = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$r=0$ 原点は固有値の縮退する点...

以下 $E=r$ を考える!

極座標 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$



$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

確認してみる，

$$x - iy = r\sin\theta\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r e^{-i\varphi}\sin\theta$$

$$H = r\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$H|\psi\rangle = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\underbrace{\left(\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = r|\psi\rangle$$

O.K.

$$P = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{+i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\left(\cos\frac{\theta}{2},\ e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ゲージ固定

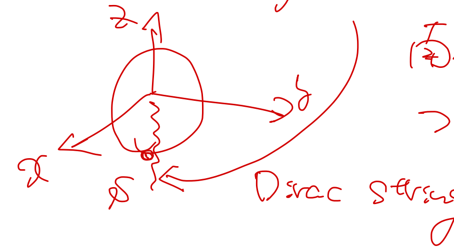
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

北極ゲージ $|\phi_N\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\psi_N^0\rangle = P|\phi_N\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi_N\rangle = |\psi\rangle\cos\frac{\theta}{2}$

$$N_N = \langle\psi_N^0|\psi_N^0\rangle = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

ただし $N_N \neq 0$ より $\theta \neq 2\pi$

$$|\psi_N\rangle = P|\phi_N\rangle/\sqrt{N_N} = |\psi\rangle = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$



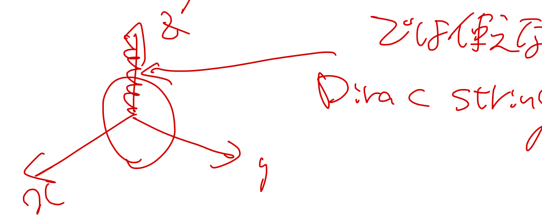
南極ではつかえない

南極ゲージ $|\phi_S\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $|\psi_S^0\rangle = P|\phi_S\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi_S\rangle = |\psi\rangle e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}$

$$N_S = \langle\psi_S^0|\psi_S^0\rangle = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$N_S \neq 0$ より $\theta = 0$ 北極では使えない

$$|\psi_S\rangle = P|\phi_S\rangle/\sqrt{N_S} = \begin{pmatrix}e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$



◎ $|\psi_N\rangle = |\psi_S\rangle e^{i\varphi}$

ベリー接続（極座標の公式をつかって）

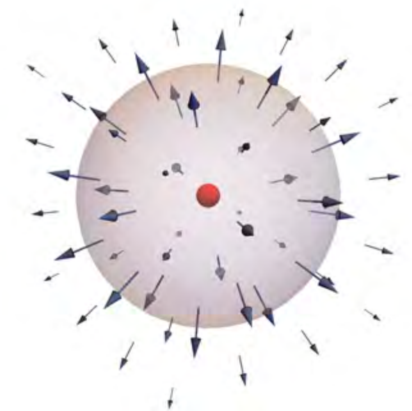
$\vec{e}_\varphi$ φ方向の単位ベクトル

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi \vec{r}}{|\partial_\varphi \vec{r}|}$$

$$\vec{A}_N = \langle \psi_N | \vec{\nabla} \psi_N \rangle = i\, \vec{e}_\varphi \frac{1}{2r} \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{A}_S = \langle \psi_S | \vec{\nabla} \psi_S \rangle = -i\, \vec{e}_\varphi \frac{1}{2r} \cot\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times A_N = \vec{\nabla}\times\vec{A}_S = \frac{i}{2}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$



"なんと" ディラック単磁極の磁場

～点電荷の電場と同じ

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^2(R)} d\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2\pi i} 4\pi R^2 \frac{i}{2}\frac{1}{R^2} = +1$$

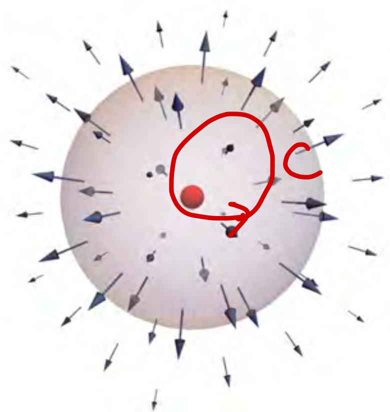
整数

ディラック単磁極の数

◎ チャーン数

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^2(R)} d\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2\pi i}4\pi R^2 \frac{i}{2}\frac{1}{R^2} = \pm 1$$ 整数

ディラック単磁極の数



◎ ベリー接続

$$i\gamma = \int_{C=\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{A} = \int_S d\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{\Omega(C)}{4\pi}\times 2\pi i$$

$$= \frac{i}{2}\Omega(C)$$

$$\underline{\gamma(C) = \frac{1}{2}\Omega(C)}$$

$\Omega(C)$：原点からCをみた時の立体角

たとえば赤道などの大円 $\Omega(C) = \frac{1}{2}4\pi = 2\pi$

$$\gamma(C) = \pi \mod 2\pi$$

☆ ベリー接続、ベリー位相、チャーン数はどうやって観測するか

“バルクエッジ対応”